LYCÉE LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

INTERROGATION N° 7

Lundi 15 décembre 2024 (13h – 14h)

1 — *Étude d'un prolongement*

Soit $f : x \mapsto x^2 \tan\left(\dfrac{1}{x}\right) \sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^*$.

2. Établir que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

2 — *Une forme indéterminée*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$. Justifier que $\dfrac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$ admet une limite quand x tend vers a.

3 — *Une étude de dérivabilité*

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \geqslant 1 \\ \phi(1-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Donner une CNS dérivabilité de f en 1.

4 — *Une fonction implicite*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbf{E_x}$ l'équation $y^2 + \ln y = x$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démonter que, pour tout réel x, l'équation $\mathbf{E_x}$ admet une unique solution, notée $y(x)$.

2. Justifier que y est dérivable.

5 — *Les grands théorèmes*

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. Soit $h : [a, b[\to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \big(f(x) - f(a)\big) \exp\left(\dfrac{1}{x-b}\right)$. Justifier que h est dérivable et calculer h'.

2. Démontrer l'existence de c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{(c-b)^2}$.

6 — *Zéros*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ admettant n zéros.

Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f' - \alpha f$ admet au moins $n-1$ zéros.

INDICATION : Trouver une fonction g usuelle telle que $g(f' - \alpha f) = (fg)'$.

7 — *Une formule de Taylor*

Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Établir l'existence d'un réel $c \in]0, x[$ tel que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{(1+c)^2}$.

Considérer une fonction de la forme $t \mapsto \ln(1+t) - t - \mathrm{M}\dfrac{t^2}{2}$ où M est une constante bien choisie.

2. Prouver l'existence et l'unicité d'un réel $\theta_x \in]0, 1[$ tel que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{(1+x\theta_x)^2}$.