LYCÉE LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

INTERROGATION N° 6

Lundi 1er décembre 2024 (13h – 14h)

1 — *Fonctions croissantes*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

2 — *Monotonie* f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ g$ soit croissante et $f \circ g \circ f$ strictement décroissante. Démontrer que f est strictement décroissante.

3 — *Étude d'un prolongement par continuité*

La fonction $f : x \mapsto \sin x \sin \dfrac{1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

4 — *Une somme de distance* f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1$. On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

1. Calculer $f(x)$ pour $x \notin]a_1, a_n[$ en fonction de $\mu := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

2. Démontrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = \dfrac{1}{2}$.

5 — *De l'inverse d'une fonction strictement positive et continue sur un segment* f

Soit $f : [0,1] \to [0,1[$ continue. Justifier que $\dfrac{1}{1-f}$ est bornée.

6 — *Séparation de deux fonctions* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) > e^x$.

1. Justifier l'existence de $\lambda \in]1,+\infty[$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) > \lambda e^x$.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) > e^x$ mais pour laquelle il n'existe pas de réels λ dans $]1,+\infty[$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) > \lambda e^x$.

7 — *Une famille de cubiques* f

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $\mathrm{P} : x \mapsto x^3 + ax^2 + 1$.

Pour quelles valeurs de a le polynôme P admet-il exactement trois racines réelles distinctes ?

8 — *Existence d'un plus petit zéro* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Justifier l'existence d'un plus grand zéro de f.

9 — *Comparaison* f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, étudier le comportement de $f(x) - \lambda x$ en $+\infty$.