LYCÉE LOUIS-LE-GRAND — HX 6

INTERROGATION N° 5

Lundi 17 novembre 2024 (13h – 14h)

1 — *Quizz sur les équivalents*

Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. On a $u_{n+1} \sim u_n$ et $u_{2n} \not\sim u_n$.
2. $u_{n+1} \sim u_n$ et $u_{2n} \sim u_n$.
3. $u_{n+1} \not\sim u_n$.
4. $u_n \sim 1$ et $u_n^n \not\sim 1$.

2 — *Une suite définie implicitement*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution x_n.
2. Étudier le sens de variation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire un équivalent de x_n.

3 — *Une suite récurrente*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$ (n racines carrées).

1. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente d'ordre un.
2. Déterminer l'unique point fixe ℓ de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
3. Représenter le graphe de f. Tracer quelques itérations de la suite sur votre figure.
4. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
5. On se propose de démontrer d'une autre façon le résultat précédent. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \ell - u_{n+1} \leqslant \frac{\ell - u_n}{2}$$

puis conclure.

4 — *Un contre-exemple*

Donner un exemple de suite strictement décroissante vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec croissante.

5 — *Une suite de racines*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 = 1 - nx$ admet une seule solution sur $[0, +\infty[$ que l'on note x_n.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ.
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.