INTERROGATION N° 4

Mercredi 12 novembre 2024 (8 – 9h)

1 — *Une récurrence atypique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$u_0 \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + (-1)^n}$$

1. Démontrer que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2 — *Une récurrence homographique*

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on pose $f(x) := \dfrac{x-1}{x+3}\cdot$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 := 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ.

2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \ell$. On pose $v_n := \dfrac{1}{u_n - \ell}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique puis en déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 — *Des inégalités*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{u_n}{2n+3}$$

Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? INDICATION : Encadrer u_n.

4 — *Extension des opérations sur les limites*

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornées et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite nulle.

Que dire de $(b_n\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5 — *Définition de la convergence*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall (n,m) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2, \; 0 \leqslant u_{n+m} \leqslant \frac{n+m}{nm}$$

En revenant à la définition, démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6 — *Inégalités*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+1}}{3}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\; v_n := \max(u_n, u_{n+1})$.

1. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît puis démontrer que sa limite est nulle.

2. En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

7 — *Une limite*

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Démontrer que $\left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max(a,b)$.