LYCÉE LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

INTERROGATION N° 3

Lundi 3 novembre 2025 (13h – 14h)

1 — *Un trinôme du second degré à paramètre*

Déterminer l'ensemble $\mathrm{E} := \left\{\alpha \in \mathbb{R}\,;\, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + \alpha \geqslant x\right\}$.

2 — *Une inéquation du second degré*

Résoudre l'inéquation $x^2 + \sqrt{2} \leqslant \left(1 + \sqrt{2}\right)x$ d'inconnue réelle x.

3 — *Bornes*

On note $\mathrm{A} := \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \,;\, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

L'ensemble A admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ? Les calculer le cas échéant.

4 — *Bornes d'un produit*

Pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{AB} := \left\{ab\,;\, (a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}\right\}$.

1. On suppose dans cette question que A et B sont des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$.

Démontrer que AB est majorée et vérifie $\sup \mathrm{AB} = \sup \mathrm{A} \times \sup \mathrm{B}$.

2. Donner des exemples de parties A et B non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que AB ne soit pas majorée.

3. Donner des exemples de parties A et B non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que AB soit majorée mais vérifie $\sup \mathrm{AB} \neq \sup \mathrm{A} \times \sup \mathrm{B}$.

5 — *Partie entière*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 4x \rfloor = 4\lfloor x \rfloor$.

6 — *Décimales*

Déterminer les quatre premières décimales après la virgule de $\dfrac{11}{17}$.

7 — *Minoration d'une somme*

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} \geqslant n^2$.

8 — *Une autre démonstration de l'irrationnalité $\sqrt{2}$*

On pose $A := \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,;\, n\sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}$. Montrer que $\forall n \in A\,,\, n\sqrt{2} - n \in A$ puis en déduire que A est vide. Conclure.

9 — *L'inégalité arithmético-géométrique fff*

On se propose de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, ie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n\,,\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_i$$

1. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $xy = 1$. Établir que $x + y \geqslant 2$.

2. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x \leqslant 1 \leqslant y$. Démontrer que $xy + 1 \leqslant x + y$.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.
Démontrer que $a_1 + a_n \geqslant 1 + a_1 a_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$.

5. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.