LYCÉE LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

INTERROGATION N° 2

Lundi 13 octobre 2025 (13h – 14h)

- *L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.*
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.*
- *Le candidat laissera libre la première page de sa copie.*
- *Des points de présentation seront enlevés à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :*

souligner les justifications essentielles et *encadrer les résultats importants*

1 — *Minoration d'un produit de factorielles*

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \prod_{k=1}^{n} (2k)! \geqslant \big((n+1)!\big)^n$.

2 — *Une inégalité grossière*

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^3 \right| \leqslant n^4$.

3 — *Une somme double*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\sigma_n := \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j}$.

4 — *Sommation par paquets*

Calculer $\sum_{k=0}^{2n} k^{2+(-1)^k}$ pour n dans $\mathbb{N}$.

5 — *Ceci n'est pas une somme double*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter en fonction de n la somme $\mathrm{S}_n := \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} ij$.

6 — *Linéarisation*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{T}_n := \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. Calculer T_n au moyen d'une linéarisation.
2. Retrouver l'expression obtenue en utilisant le changement de variable $j = n - k$.

7 — *Une somme binomiale*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Expliciter $\cos\frac{\pi}{8}$ au moyen de la formule de duplication.
2. En déduire une expression simplifiée de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} i^k$.

8 — *Produit de convolution sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*

On conviendra de noter u_n le terme général d'une suite u. Pour tous éléments u et v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $u \star v := w$ où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

1. Démontrer que, pour toutes suites u, v et w, on a $u \star v = v \star u$ et $u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$.
2. Soit $\varepsilon := (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Vérifier que, pour toute suite u, $u = u \star \varepsilon = \varepsilon \star u$.
3. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ et $u := \left(\rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer l'existence d'une suite v telle que $u \star v = \varepsilon$.