LYCÉE LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

INTERROGATION N° 1

Samedi 27 septembre 2025 (8h – 9h)

1 — *Paramètre rationnel du cercle*

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre $Z := \dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$.

2 — *Couples de même cube*

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a^3 = b^3$.

.

3 — *Sous-ensembles remarquables du plan*

Représenter dans le plan les ensembles $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ respectivement définis par les inéquations suivantes :

$$|iz+1| \leqslant 1\ ,\ \mathrm{Re}(z+1) \geqslant 0 \ \text{ et } \ 1 \leqslant |z+1| \leqslant 2$$

4 — *Couples définis par leur somme et leur produit*

Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x + y = 1 + i$ et $xy = 2 - i$.

5 — *Une équation bicarrée*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$.

6 — *Un triangle rectangle*

Soit $a \in \mathbb{R}i$ non nul et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que les points d'affixes a^n, a^{n+1} et a^{n+2} forment un triangle rectangle.

7 — *Une racine carrée*

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Développer $(x + i y)^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4ab + 2i\left(a^2 - b^2\right)$.

8 — *Petits calculs f*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$.

1. Développer $(a + i)(b + i)(c + i)$.

2. On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et $ab + bc + ca = 1$.

Démontrer que $\left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)\left(1 + c^2\right)$ est le carré d'un nombre entier.

9 — *Une équation atypique*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 - \overline{z} = |z|$.

10 — *Une inégalité*

Démontrer que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, $|z| \leqslant \left|z^2\right| + |z - 1|$.

11 — *Une équation autour de l'exponentielle*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.

12 — *Étude d'une application*

On note $\mathrm{J} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\mathrm{J}(z) := z + \dfrac{1}{z}\cdot$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\mathrm{J}(z) = 1\cdot$

2. Démontrer que $\mathrm{J}\left\langle \mathbb{U} \right\rangle = [-2, 2]$.

3. Déterminer $\mathrm{J}\left\langle \mathbb{C}^* \right\rangle$.