LYCÉE LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

INTERROGATION N° 0

Samedi 13 septembre 2024 (8h – 10h)

- ⇛ *L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.*
- ⇛ *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- ⇛ *Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.*
- ⇛ *Le candidat laissera libre la première page de sa copie.*
- ⇛ *Des points de présentation seront enlevés à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :*

souligner les justifications essentielles et *encadrer les résultats importants*

1 — *Négations*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$. Écrire sous forme symbolique les propositions suivantes ainsi que leur négation :

a. f n'est pas de signe constant ; **b.** f est majorée.

2 — *Un encadrement de la factorielle*

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n! \leqslant n^n$.

3 — *Inégalités sur l'axe réel*

Soit a et b deux nombres réels. On considère les deux propositions suivantes :

$$\mathscr{P}_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \left(x < a \implies x \leqslant b\right) \qquad ; \qquad \mathscr{P}_2 : a \leqslant b$$

Les assertions suivantes sont-elles vraies $\mathscr{P}_1 \implies \mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_2 \implies \mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_1 \iff \mathscr{P}_2$?

4 — Un contre-exemple f

Pour toute fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, on considère les propositions suivantes :

$$\mathscr{M}_1 :\quad \forall x\in\mathbb{R}_+\quad,\quad \exists\alpha>0\quad,\quad f(x)>\alpha \qquad ; \qquad \mathscr{M}_2 :\quad \exists\alpha>0\quad,\quad \forall x\in\mathbb{R}_+\quad,\quad f(x)>\alpha$$

1. Caractériser les fonctions $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ vérifiant $\mathscr{M}_1$.

2. Déterminer un exemple de fonction $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathscr{M}_1$ mais pas la propriété $\mathscr{M}_2$.

5 — Une racine carrée f

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+4}$ n'est pas un entier.

6 — Inégalités et monotonie f

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f\in\mathrm{E}$ et $x\in\mathbb{R}$, on considère les formules suivantes :

$$\mathscr{P}_1(f,x) : f(x)=x \quad ; \quad \mathscr{P}_2(f,x) : (f\circ f)(x)=x \quad ; \quad \mathscr{P}_3(f,x) : f(x)<x \quad ; \quad \mathscr{P}_4(f,x) : f(x)>x$$

On rappelle que $(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)$.

1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

i. $\forall f\in\mathrm{E}\,,\ \exists x\in\mathbb{R}\,,\ \mathscr{P}_1(f,x)$ **ii.** $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \exists f\in\mathrm{E}\,,\ \mathscr{P}_1(f,x)$

2. Soit $(f,x)\in\mathrm{E}\times\mathbb{R}$. Quelle est la négation de la proposition « $\mathscr{P}_3(f,x)$ ou $\mathscr{P}_4(f,x)$ » ?

3. Dans cette question, on fixe une fonction $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strictement croissante. Démontrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \Big(\mathscr{P}_2(f_0,x)\implies\mathscr{P}_1(f_0,x)\Big)$$

4. Écrire la négation de la proposition

$$\forall f\in\mathrm{E}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}\,,\ \Big(\mathscr{P}_2(f,x)\implies\mathscr{P}_1(f,x)\Big)$$

La proposition ci-dessus est-elle vraie ?

7 — Un pas vers Tchebychev ff

Soit $x\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+\dfrac{1}{x}\in\mathbb{Z}$. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ x^n+\dfrac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$.

Indication : On pourra calculer $\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

8 — *Une équation fonctionnelle ff*

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y) \quad (\mathbf{E})$$

On procède par Analyse-synthèse.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant ($\mathbf{E}$).
   - **a.** Déterminer $f(0)$.
   - **b.** Montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)^2 = y^2$. Que peut-on en déduire sur f ?
   - **c.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
2. Conclure.

9 — *Une équation fonctionnelle fff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(t^2 + x\right) = tf(t) + f(x)$$

1. En donnant une valeur numérique bien choisie à (t, x), démontrer que $f(0) = 0$.
2. Établir que f est impaire.
3. Démontrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(a^2 + b^2\right) = f\left(a^2\right) + f\left(b^2\right)$ puis en déduire que
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u+v) = f(u) + f(v)$$
4. En considérant $f\left((t+1)^2\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$, démontrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \lambda t$.

10 — *Variations additives fff*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$$