Lycée Louis-Le-Grand **HX 6**

Composition n° 2

Samedi 15 novembre 2025 (8h – 12h)

- *L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.*
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.*
- *Le candidat laissera libre la première page de sa copie.*
- *Des points de présentation seront enlevés à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :*

souligner les justifications essentielles et *encadrer les résultats importants*

Sujet 1 — *Un trio d'équations fonctionnelles*

On considère les trois équations fonctionnelles suivantes

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E_1} : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y)\\
&\mathbf{E_2} : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \qquad \text{d'inconnue } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\
&\mathbf{E_3} : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}
\end{aligned}$$

L'objectif de ce sujet est de déterminer les solutions monotones de chacune de ces équations.

Partie I – Solutions monotones de $\mathbf{E_1}$

1. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de l'équation $\mathbf{E_1}$.

a. Déterminer $f(0)$ puis exprimer $f(nx)$ en fonction de n et $f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire $f(r)$ en fonction de r et $f(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) := \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ u_n(x) \leqslant x$ et $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

b. Construire une suite de rationnels $\big(v_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ minorée par x vérifiant $v_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

3. En déduire les solutions monotones de $\mathbf{E_1}$.

Partie II – Application aux solutions monotones de $\mathrm{E_2}$

1. Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution monotone de l'équation $\mathbf{E_2}$.

a. On suppose dans cette question l'existence de $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(a) = 0$. Déterminer la fonction f.

b. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$? Que dire de f si $f(0) = 1$?

2. On considère dans cette question une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone non constante de l'équation $\mathbf{E_2}$.

a. Déterminer $f(0)$ et $f(1)$ puis en déduire $f(-1)$.

b. Démontrer que f est impaire.

c. Justifier l'existence de la fonction $g := \ln\circ f \circ \exp$.

d. En utilisant g, établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x > 0\,,\ f(x) = x^\alpha$.

3. En déduire les solutions monotones de $\mathbf{E_2}$.

Partie III – Solutions monotones de $\mathrm{E_3}$

1. On considère dans cette question une solution $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement monotone de $\mathbf{E_3}$.

a. Déterminer les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$.

b. Démontrer que f vérifie l'équation $\mathbf{E_2}$. INDICATION : Calculer $f\left(\dfrac{x+xy}{x-xy}\right)$ lorsque cela a un sens.

2. On note ϕ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 6^x - 3^x - 2^x$.

a. Justifier que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $\phi'(x)$ pour tout réel x.

b. Établir que ϕ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Résoudre l'équation $6^\alpha - 3^\alpha - 2^\alpha - 1 = 0$ d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3. En déduire les solutions monotones de $\mathbf{E_3}$.

Sujet 2 — *Étude d'une suite récurrente*

Pour un réel x, on considère la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0(x) := x \ \text{ et } \ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{e^{u_n(x)}}{n+1}$$

Ainsi $u_0(x) = x$, $u_1(x) = e^x$ et $u_2(x) = \frac{1}{2}\exp\big(\exp(x)\big)$, etc.

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\phi_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto \dfrac{e^x}{n+1}\cdot$

On donne les valeurs numériques $\ln(6\ln 2)\in[1,42;1,43]$, $\ln 3\in[1,09;1,10]$, $\frac{e}{2}\in[1,35;1,36]$ et $e^2\in[7,38;7,39]$.

Partie I – Étude de la convergence

On note $\mathrm{E}_0 := \left\{x\in\mathbb{R}\,;\, u_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$ et $\mathrm{E}_{+\infty} := \left\{x\in\mathbb{R}\,;\, u_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\right\}$.

1. Justifier que, pour tout réel x, $\forall n\geqslant 1,\ u_n(x)>0$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$.
   - **a.** On suppose qu'il existe un rang $\mathrm{N}\geqslant 2$ pour lequel $u_{\mathrm{N}}(x)\leqslant 1$.

     Montrer que pour tout $n\geqslant \mathrm{N}+1$, $\ u_n(x)\leqslant \dfrac{e}{n}\cdot$ En déduire que $x\in\mathrm{E}_0$.
   - **b.** Réciproquement, montrer que si $x\in\mathrm{E}_0$, alors il existe un entier $\mathrm{N}\geqslant 2$ tel que $u_{\mathrm{N}}(x)\leqslant 1$.
3. Démontrer que $\mathbb{R}\setminus\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_{+\infty}$. INDICATION : Montrer que, pour $x\notin\mathrm{E}_0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\ u_n(x)\geqslant \ln n$.

Partie II – Étude des ensembles E_0 et $\mathrm{E}_{+\infty}$

1. Démontrer que $0\in\mathrm{E}_0$.
2. On note $f : x\mapsto e^x - x(x+1)$.
   - **a.** Montrer, en étudiant les variations de f, que pour tout $x\geqslant 2$, $\ f(x)\geqslant 0$.
   - **b.** Montrer que pour tout $n\geqslant 0$, $\ u_n(1)\geqslant n+1$. En déduire que $1\in\mathrm{E}_{+\infty}$.
3. - **a.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, exprimer $u_n(x)$ au moyen de $\phi_0,\ldots,\phi_{n-1}$ et x.
   - **b.** En déduire que, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x<y$, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(x)<u_n(y)$.
4. Justifier l'existence de $\lambda := \sup \mathrm{E}_0$.
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrer l'existence de $c_n\in\mathbb{R}$ tel que $u_n(c_n)=1$.
6. Justifier que $c_n\leqslant\lambda$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $n\geqslant 2$.
7. En déduire les ensembles E_0 et $\mathrm{E}_{+\infty}$ en fonction de λ.