

COMPOSITION N° 1

Samedi 4 octobre 2025 (8h – 12h)

- ⇒ L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.
- ⇒ Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- ⇒ Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.
- ⇒ Le candidat laissera libre la première page de sa copie.
- ⇒ Des points de présentation seront enlevés à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :

souligner les justifications essentielles et

encadrer les résultats importants

Sujet 1

Calcul d'une somme trigonométrique

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Notons, pour tout d entier naturel tel que $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$f_n(d) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad \text{et, pour } d \text{ tel que } 1 \leq d \leq n, \quad g_n(d) := f_n(d) - f_n(d-1)$$

1. En utilisant les nombres complexes, démontrer que

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{2jk\pi}{n} = -1$$

2. a. Calculer $f_n(0)$ et $g_n(1)$.

b. Soit $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ fixé. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2((j+1)x) - 2\sin^2(jx) + \sin^2((j-1)x) = 2\sin^2(x) \times \cos(2jx)$$

c. En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $g_n(j+1) - g_n(j)$ est une constante.

d. En conclure que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, $g_n(k) = n+1-2k$.

3. En déduire l'expression de $f_n(d)$ en fonction de n et $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Sujet 2*Étude d'une application*

Soit E un ensemble, A et B des parties de E . On définit la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) && \text{où } \bar{X} \text{ désigne le complémentaire de } X \text{ dans } E \\ X &\longmapsto (A \cap X) \cup (B \cap \bar{X}) \end{aligned}$$

1. Donner des expressions simplifiées de $f(B)$ et $f(\bar{A})$.
2. On suppose dans cette question que $B = \bar{A}$.
 - a. Soit $X \subset E$. Simplifier $A \cap f(X)$ et $B \cap \overline{f(X)}$.
 - b. En déduire que f est bijective et expliciter f^{-1} .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f .
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de surjectivité de f .

Sujet 3*Inversion et points rationnels sur un cercle*

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, et identifié à $\mathbb{C}$. C'est-à-dire que l'on confondra dans ce sujet un point M et son affixe z . On appellera plan épointé le plan $\mathbb{R}^2$ privé de son origine $O = (0, 0)$. Soit M un point du plan, différent de O . On appelle inverse de M le point M' défini par

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{OM^2} \overrightarrow{OM}$$

Cela définit une application du plan épointé dans lui-même, appelée ici inversion.

Pour tout point M d'affixe z non nulle, on note $f(z)$ l'affixe du point M' .

Partie I – Généralités sur l'inversion

1. Montrer, pour tout nombre complexe non nul z , $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.
2. Montrer que l'inversion est une involution du plan épointé, i.e. $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$.
On en déduit notamment (inutile de le prouver) que l'inversion est une bijection.
3. Soit A une partie de $\mathbb{C}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Établir que $z \in A \iff f(z) \in f(A)$.
4. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donner la forme algébrique de $f(z)$.
5. Soit $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application et E la partie du plan complexe, définie par

$$E := \{z \in \mathbb{C}^* ; h(z) = 0\}$$

Montrer que $f(E) = \{z \in \mathbb{C}^* ; h(f(z)) = 0\}$.

Partie II – Image d'un cercle ou d'une droite par une inversion

1. a. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω (d'affixe ω), de rayon $r > 0$, vu comme partie du plan complexe. Justifier que

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{\omega}) + |\omega|^2 - r^2 = 0 \right\}$$

- b. Montrer que z appartient à l'image $f(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ par l'inversion si et seulement si

$$(r^2 - |\omega|^2)|z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{\omega}) = 1$$

- c. En déduire que si $0 \notin \mathcal{C}$, alors $f(\mathcal{C})$ est un cercle :

$$\text{de centre } -\frac{\omega}{r^2 - |\omega|^2} \quad \text{et de rayon } \frac{r}{|r^2 - |\omega|^2|}$$

- d. Déterminer les cercles $\mathcal{C}$ invariants par l'inversion, c'est-à-dire tels que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

2. Montrer que l'image par f d'une droite ne passant pas par l'origine est un cercle privé de 0.

INDICATION : On pourra commencer par établir qu'une droite Δ ne passant pas par l'origine admet une équation de la forme $uz + \bar{u}\bar{z} = 1$ où $u \in \mathbb{C}^*$. On pourra ensuite vérifier que $f(\Delta)$ est un cercle privé de l'origine au moyen des questions I.5. et II.1.a.

3. Démontrer que, si $0 \in \mathcal{C}$, alors $f(\mathcal{C} \setminus \{0\})$ est une droite.

Partie III – Points rationnels sur une droite ou sur un cercle

On dit qu'un nombre complexe z est rationnel si $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ sont rationnels. On pourra utiliser sans justification que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1. a. Donner un exemple de droite admettant une infinité de points rationnels, d'une droite ne passant pas par l'origine admettant un unique point rationnel et enfin d'une droite n'ayant aucun point rationnel. On pourra définir chacun de ces exemples au moyen d'une équation cartésienne usuelle $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq 0$.
b. Montrer que si une droite comporte au moins deux points rationnels, elle en admet une infinité.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que z est rationnel si et seulement si $f(z)$ est rationnel.
3. a. Montrer que le cercle de centre 0 de rayon $\sqrt[4]{2}$ n'admet pas de point rationnel.
b. Montrer l'existence d'un cercle dont l'unique point rationnel est l'origine. Montrer l'existence d'un cercle admettant exactement deux points rationnels, dont l'origine.
c. On suppose que $\mathcal{C}$ est un cercle passant par l'origine, et admettant au moins deux autres points rationnels que l'origine. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une infinité de points rationnels.
d. En déduire qu'un cercle ayant au moins trois points rationnels en a une infinité.