AN 2 | Suites numériques

Toutes les suites rencontrées ci-dessous sont à valeurs réelles.

1. Quizz

1 — Vrai ou faux ?

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$ est bornée.
2. Pour tout $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\dfrac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. La somme de deux suites divergentes est divergente.
4. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
5. Une suite non majorée diverge vers $+\infty$.
6. $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies (u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
7. $\left(u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty \text{ ou } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty\right) \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
8. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
9. Si $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées.
10. Une suite décroissante qui admet une sous-suite convergente est convergente.
11. Une suite croissante qui admet une sous-suite majorée est convergente.
12. La partie entière d'une suite réelle convergente est convergente.
13. Le maximum de deux suites réelles convergentes définit une suite convergente.
14. Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
15. Le quotient de deux suites de limite $+\infty$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
16. Si $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $(\sin\theta_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite.
17. Le produit de deux suites réelles minorées est minoré.
18. Une suite réelle croissante à partir d'un certain rang est minorée.

2. Exercices élémentaires

2 — Un système linéaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n+\lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n-\lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

3 — Somme des carrés

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n^2 + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? On justifiera avec soin sa réponse.

4 — *Exemples*

Donner des exemples de suites : majorée et non minorée, minorée et non majorée puis ni croissante, ni décroissante.

5 — *Un contre-exemple*

Donner l'exemple de deux suites divergentes dont le produit est une suite convergente.

6 — *Étude d'une suite récurrente*

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

7 — *Une relation de récurrence d'ordre un*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^3}$.

Étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8 — *B.A.BA sur les équivalents*

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $u_n := \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}$.

9 — *Une suite implicitement définie*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) := x^n + 6x - 1$.

1. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et convergente.

3. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

10 — *Récurrence linéaire d'ordre un avec second membre f*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2^n - 3u_n\ \ (\star)$.

1. Déterminer une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(\star)$.

2. Calculer la suite de terme général $w_n := u_n - v_n$. On exprimera w_n en fonction de n et u_0.

3. On suppose que $u_0 \neq \dfrac{1}{5}$. Montrer que $u_n \sim \left(u_0 - \dfrac{1}{5}\right)(-3)^n$ puis trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.

4. En déduire l'ensemble $\left\{u_0\,;\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone}\right\}$.

11 — *Monotonie des moyennes d'une suite monotone* f

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone. Montrer que $\left(\dfrac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

12 — *Une étude asymptotique* f

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite définie par $u_n := \left(1+\dfrac{\lambda}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}$.

13 — *Réciproque partielle du théorème Cesàro* f

Montrer que la réciproque du théorème de Césaro est vraie sous l'hypothèse supplémentaire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

14 — *Un système non linéaire* f

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{u_n}+e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

1. Démontrer que $e^{\theta_n}+e^{-\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ \theta_n := \dfrac{u_n-v_n}{2}$.
2. En déduire que $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

   INDICATION : Exprimer θ_n en fonction de $c_n := e^{\theta_n}+e^{-\theta_n}$ en résolvant une équation du second degré.

3. Exercices classiques plus techniques

15 — *Une suite implicite* f

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'unique réel solution de l'équation $x^5+nx-1=0$.

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite. Trouver un équivalent de u_n.

16 — *Une forme indéterminée* f

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n = \left(\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right)^n$.

17 — *Exemples et contre-exemples sur les bornes* ff

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels bornées.

1. On suppose dans cette question que $\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ u_k \leqslant v_\ell$. Comparer $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k$ et $\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

2. On suppose dans cette question que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leqslant v_k$.

a. Démontrer que $\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell \leqslant \inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$ et $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell \leqslant \sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

b. Donner un exemple de suites pour lesquelles $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell < \inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

c. Même question avec $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell > \inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

18 — *Vers Stirling*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

1. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Démontrer que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Indications

1

Pour trouver des contre-exemples, il est parfois intéressant de définir u_n différemment selon la parité de n.

2

Appliquer les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites.

3

Inutile de revenir à la définition : on peut conclure directement via un théorème.

4

Chercher des exemples très simples, pas exemple des suites d'entiers relatifs.

5

On pourra utiliser la suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$.

6

Commencer par une étude graphique.

7

Quel est le signe de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la suite est monotone.

8

Effectuer une disjonction de cas selon le signe de β.

9

On pourra vérifier que x_n appartient à $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-3)^n w_0 = (-3)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right)$.

11

Poser

$$v_n = \frac{1}{n+1}\left(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right)$$

puis vérifier que

$$(n+2)\left(v_{n+1} - v_n\right) = u_{n+1} - v_n$$

12

S'intéresser à $\ln u_n$. Entreprendre une disjonction de cas dans le but de trouver un équivalent de $\ln u_n$.

13

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

14

Passer à l'angle moitié au 1.

15

On trouve que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

16

Attention, c'est une forme indéterminée. Revenir à une forme exponentielle et trouver la limite de $\ln u_n$.

17

On posera $\mathrm{U} := \{u_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ et $\mathrm{V} := \{v_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ afin d'alléger les notations.

18

Pour des raisons évidentes de simplification, il est adapté de former u_{n+1}/u_n au 1. Procéder par récurrence au 2. Pour le 3., remarquer que $u_1 = 1/2$.

5. Solutions

1

1. Vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$$
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

2. Vrai. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ aussi d'après les théorèmes sur les opérations et les suites. *Réciproquement*, si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, puisque $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ aussi par les mêmes aguments.

3. Faux. Cex : $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(-n)_{n\geqslant 0}$.

4. Vrai. Preuve par l'absurde : si (u_n+v_n) convergeait, alors la suite de terme général $v_n = u_n+v_n-u_n$ convergerait aussi.

5. Faux. Cex : $\left((-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$.

6. Faux. Cex :
$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}, \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

7. Faux. L'implication $\Longrightarrow$ est vraie mais sa réciproque est fausse comme le prouve le cex : $((-1)^n n)_{n\geqslant 0}$.

8. Faux. Cex : $(n+(-1)^n)_{n\geqslant 0}$.

9. Faux. Cex $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(1/n^2)_{n\geqslant 0}$.

10. Vrai. Si $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \leqslant u_n$ (car $\phi \geqslant \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$). Comme une suite convergente est minorée, on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée donc convergente.

11. Vrai. Si $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite majorée de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \geqslant u_n$ (car $\phi \geqslant \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$). On en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée donc convergente.

12. Faux. Cex : $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

13. Vrai par la formule :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \max(u_n, v_n) = \frac{u_n+v_n+|u_n-v_n|}{2}$$

14. Faux. Cex : $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$.

15. Faux. Cex :
$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ \sqrt{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}, \quad v_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ impair} \\ n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

16. Faux : cex $(\pi n)_{n\geqslant 0}$.

17. Faux : cex $(-1)_{n\geqslant 0}$ et $(n)_{n\geqslant 0}$.

18. Vrai. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante à partir du rang n_0, le réel $\min(u_0,\ldots,u_{n_0})$ est un minorant de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Pour rechercher des contre-exemples sur les suites, il peut être utile de définir u_n selon la parité de l'indice n.

⇛ Attention aux idées fausses : cf. 8. et 14.

2 ↺

Soit $(\ell_1,\ell_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u_n+\lambda v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $u_n-\lambda v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$. On remarque que

$$u_n=\frac{u_n+\lambda v_n+u_n-\lambda v_n}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\ell_1+\ell_2}{2}\quad\text{et}\quad v_n=\frac{u_n+\lambda v_n-(u_n-\lambda v_n)}{2\lambda}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\ell_1-\ell_2}{2\lambda}$$

par opérations sur les limites.

3 ↺

On remarque que $\forall n\in\mathbb{N},\ \ 0\leqslant |u_n|\leqslant\sqrt{u_n^2+v_n^2}$. Ainsi $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ par le théorème d'encadrement. On prouve de même que $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

4 ↺

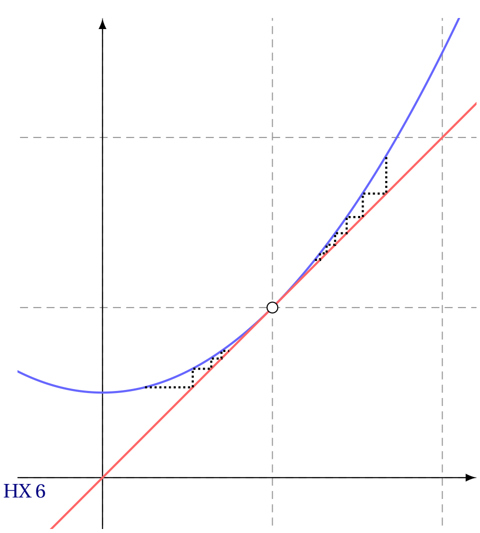
Voici des exemples élémentaires : $(-n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 0 mais non minorée, $(n)_{n\geqslant 0}$ est minorée non majorée et $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas monotone.

5 ↺

Les suites $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ et $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ nous donnent un contre-exemple élémentaire.

6 ↺

On commence par une étude graphique :



Comme la fonction $f : x\mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est toujours définie.

Il est clair que f croît sur $\mathbb{R}_+$ et décroît sur $\mathbb{R}_-$.

On remarque que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1+x^2}{2}\geqslant x$$

car $(x-1)^2\geqslant 0$. Ainsi, la suite est toujours croissante.

De plus, $f(x) = x \iff x = 1$.

- Cas 1 : $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. Comme $[0,1]$ est stable par f (cf. les variations de f par exemple), $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ par continuité de f. Ainsi $\ell = 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Cas 2 : $u_0 > 1$. Comme $]1,+\infty[$ est stable par f (cf. les variations de f par exemple), $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, elle admet une limite $\ell \in]1,+\infty[\cup\{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \in \mathbb{R}$. On aurait alors $f(\ell) = \ell$ par continuité de f, d'où $\ell = 1$, ce qui est absurde. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Cas 3 : $u_0 < -1$. On a alors $u_1 > 1$ et on est ramené au cas 2 : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Cas 4 : $-1 \leqslant u_0 < 0$. On a alors $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ et on est ramené au cas 1 : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

7

On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$.

- Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^3} \leqslant u_n$ car $u_n \in \mathbb{R}_+$.
- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel ℓ positif.
- Comme f est continue, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Ansi $\ell = f(\ell)$, d'où $\ell = 0$ après tout calcul.

8

- Cas 1 : $\beta > 0$. On a alors $u_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta} \sim \frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}$.
- Cas 2 : $\beta < 0$. On a alors $u_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta} \sim n^\alpha$.
- Cas 3 : $\beta = 0$. On a alors $u_n = \frac{n^\alpha}{2}$.

9

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que somme des deux fonctions $x \mapsto x^n$ croissante et $x \mapsto 6x-1$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$). Comme $f_n(0) = -1$ et $f_n(1/6) > 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe x_n dans $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. L'unicité de x_n provient de la stricte croissance de f_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $\left[0, \frac{1}{6}\right]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ d'où $f_n(x_{n+1}) \geqslant 0$. Comme f_n est strictement croissante et s'annule en x_n, on en déduit que $x_{n+1} \geqslant x_n$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est donc convergente car décroissante et majorée par $\frac{1}{6}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant x_n \leqslant 6^{-n}$ donc $x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $x_n = \dfrac{1-x_n^n}{6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{6}$.

10

1. La suite de terme général $v_n := \frac{2^n}{5}$ convient clairement.
2. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-3)^n w_0 = (-3)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right)$.
3. ⇛ Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{5} + (-3)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right)$ et $|2| < |-3|$ avec $u_0 - \frac{1}{5} \neq 0$, on a $u_n \sim \left(u_0 - \dfrac{1}{5}\right)(-3)^n$.

   ⇛ On a donc $u_{n+1} - u_n = 2^n - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $2^n = o\left((-3)^n\right)$, on déduit de la question précédente que $u_{n+1} - u_n \sim -4\left(u_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^n$.
4. ⇛ Cas 1 : $u_0 = \frac{1}{5}$· On a alors $u_n = \frac{2^n}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   ⇛ Cas 2 : $u_0 \neq \frac{1}{5}$· Par la question précédente, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $-4\left(u_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^n$ APCR. Comme cette expression est de signe alterné, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

   Ainsi $\{u_0\,;\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone}\} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

11

Supposons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croissante. Posons $v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On vérifie que

$$(n+2)(v_{n+1} - v_n) = u_{n+1} - v_n$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \leqslant \frac{(n+1)u_{n+1}}{n+1}$$

et donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. Ainsi (v_n) est croissante. Si (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante pour conclure.

12

⇛ Cas 1 : $\alpha > 0$. On a alors $\ln u_n \sim \frac{\lambda n^\beta}{n^\alpha} = \lambda n^{\beta-\alpha}$.

- Cas 1.1 : $\beta > \alpha$. On a $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Cas 1.2 : $\beta < \alpha$. On a $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Cas 1.3 : $\beta = \alpha$. On a $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\lambda$.

⇛ Cas 2 : $\alpha < 0$. On a alors $\ln\left(1 + \frac{\lambda}{n^\alpha}\right) = -\alpha \ln n + \ln(\lambda + n^\alpha)$. Comme $\ln(\lambda + n^\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\lambda$ et $-\alpha \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où $\ln u_n \sim -\alpha n^\beta \ln n$.

- Cas 2.1 : $\beta \geqslant 0$. On a $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Cas 2.2 : $\beta < 0$. On a $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

⇛ Cas 3 : $\alpha = 0$. On a alors $u_n = \frac{n^\alpha}{2}$·

13

Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et $\dfrac{u_0+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On déduit alors du théorème de Césaro que $\ell=\ell'$.

14

1. Par une factorisation par l'angle moitié, on obtient :
$$e^{u_n}+e^{v_n} = e^{\frac{u_n+v_n}{2}}\left(e^{\theta_n}+e^{-\theta_n}\right)$$
d'où $e^{\theta_n}+e^{-\theta_n}=e^{-\frac{u_n+v_n}{2}}\left(e^{u_n}+e^{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $c_n := e^{\theta_n}+e^{-\theta_n}$. Comme $\left(e^{\theta_n}\right)^2-c_ne^{\theta_n}+1=0$, e^{θ_n} est une racine réelle du trinôme X^2-c_nX+1. Le discriminant de celui-ci $\Delta := c_n^2-4$ est donc positif et les racines du trinôme valent $\frac{c_n\pm\sqrt{c_n^2-4}}{2}$. Comme $\frac{c_n\pm\sqrt{c_n^2-4}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, on a $e^{\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par le théorème d'encadrement d'où $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $u_n=\frac{u_n+v_n}{2}+\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

15

1. Pour tout entier naturel n, notons $f_n : x\mapsto x^5+nx-1$. La fonction f_0 ne s'annulle qu'au point $u_0=1$. Pour tout entier n non nul, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n'(x)=5x^4+n>0$. Comme $f_n(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un unique $u_n\in\mathbb{R}$ tel que $f_n(u_n)=0$.

2. Pour tout entier naturel, on a vu que $u_n>0$. De plus, $1-nu_n=u_n^5>0$ d'où $0<u_n<1/n$ et, par encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $1-nu_n=u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $u_n\sim\frac{1}{n}$.

16

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\ln u_n = n\ln\frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = n\ln\left(1-e^{-2n}\right)-n\ln\left(1+e^{-2n}\right)$.
Comme $e^{-2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $n\ln\left(1+\varepsilon e^{-2n}\right)\sim\varepsilon ne^{-2n}$ (où $\varepsilon=\pm1$). Par croissances comparées, $ne^{-2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par continuité de l'exponentielle en 0.

17

Notons $U := \{u_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ et $V := \{v_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$.

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme u_k est un minorant de V, on a $u_k\leqslant\inf V$. Ainsi $\inf V$ est un majorant de U d'où $\sup U\leqslant\inf V$.

2. **a.** On reprend les notations de la question précédente.
   - $\Rrightarrow$ Tout minorant de U est aussi un minorant de V. Le plus grand minorant de U est donc un minorant de V : ainsi $\inf U\leqslant\inf V$.

⇛ Tout majorant de V est aussi un majorant de U. Le plus petit majorant de V est donc un majorant de U : ainsi $\sup U \leqslant \sup V$.

b. Il suffit de choisir $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Il suffit de choisir $u_0 = -2$ et $v_0 = -1$, puis $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}\binom{2n+2}{n+1}}{4\sqrt{n}\binom{2n}{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

Comme $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \geqslant 4n(n+1)$, on a $2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)}$ d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. On note $\mathscr{P}(n)$ l'inégalité $u_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

⇛ $\mathscr{P}(1)$ est vraie car $u_1 = \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$ (puisque $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3}$).

⇛ Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé. En utilisant l'expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ calculée à la question précédente, on a $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}u_n$, donc

$$u_{n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$$

Pour en déduire $\mathscr{P}(n+1)$, il suffit alors de montrer que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$. Or cette inégalité est équivalente à $(2n+3)(2n+1) \leqslant 4(n+1)^2$, et cette dernière inégalité est vraie car $(2n+3)(2n+1) - 4(n+1)^2 = 4n^2+8n+3-(4n^2+8n+4) = -1$.

On a ainsi démontré par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. Puisque $\frac{n}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2}$, on déduit de la question précédente que $u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour tour $n \geqslant 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, et comme on a déjà montré qu'elle est croissante, elle est convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_1 = \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, en passant à la limite dans cet encadrement on obtient $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.