



Les inégalités sont au fondement de l'analyse. Il est essentiel de savoir les manipuler avec dextérité.



Tempête de neige en mer, Turner

1	Nombres réels	1
1	Quizz	2
2	Exercices élémentaires	4
3	Exercices classiques plus techniques	5
4	Indications	7
5	Solutions	9

1. Quizz

1 ?

QCM sur les superpositions d'inégalités

Soit a et b des réels tels que $-1 < a < 2$ et $2 \leq b < 4$. On a :

- a.** $-5 < a - b < 0$; **c.** $-2 < ab < 8$; **e.** $0 \leq \left| \frac{a}{b} \right| < 1$; **g.** $1 < a^2 < 4$;
b. $-3 < a - b < -2$; **d.** $-4 < ab < 8$; **f.** $\frac{1}{2} < \left| \frac{a}{b} \right| < 1$; **h.** $-1 < a^3 < 8$.

2 ?

Vrai ou faux ? f

- 1.** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x \leq y \implies x \leq \sqrt{xy} \leq y$. **3.** $\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
2. $\forall (x, y) \in [1, +\infty[, e^x + e^y \leq e^{x+y}$. **4.** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$;
5. $\forall (a, b, u, v) \in \mathbb{R}^4, |u| \leq 1 \wedge |v| \leq 1 \implies |ua + vb| \leq |a + b|$.
6. $\forall (a, b, u, v) \in \mathbb{R}^4, |u| \leq 1 \wedge |v| \leq 1 \implies |ua + vb| \leq |a| + |b|$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{2n} x^i > 0$. **9.** $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n x^i > 0$. **10.** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, x^n \leq x^{n+m} + 1$.
11. Pour tout x réel, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.
12. $\forall x \in \mathbb{R}_+, |\sin x| \leq \sqrt{x}$. On admettra que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.
13. Pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n} \leq b^{2n} \iff |a| \leq |b|$.
14. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-1/x} < e^{-a} \iff x < \frac{1}{a}$.

3 ?

QCM sur les équations et inéquations f

- 1.** L'ensemble des solutions de $x^4 - x > 0$ est :
a. $]0, 1[$; **b.** $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$; **c.** $]1, +\infty[$.
2. L'ensemble des solutions de $\sqrt{x^2 + 2x} < x + 1$ est :
a. $[0, +\infty[$; **b.** $] -\infty, -2] \cup [0, +\infty[$; **c.** $[-2, 0]$.
3. L'ensemble des solutions de $|x^2 - 3| < 2$ est :
a. $]1, \sqrt{5}[$; **b.** $] -\sqrt{5}, -1[\cup]1, \sqrt{5}[$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 2| \leq \frac{1}{4}$, on a :

a. $\left|1 - \frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{8};$ b. $\left|1 - \frac{2}{x}\right| \leq \frac{1}{7};$ c. $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{2};$ d. $|x^2 - 4| \leq \frac{17}{16}.$

5. L'ensemble des solutions de $x + \frac{1}{x} > -1$ est :

a. $\mathbb{R}_+^*;$ b. $] -1, +\infty[;$ c. $] -1, 0[\cup] 0, 1[.$

6. L'ensemble des solutions de $x + \frac{1}{x} > -3$ est :

a. $\left] -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0 \right[;$ b. $\left] -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right[\cup] 0, +\infty[.$

7. L'ensemble des solutions de $|x-1| + |x-2| \geq 5$ est :

a. $] -\infty, -1];$ b. $[4, +\infty[;$ c. $] -\infty, -1] \cup [4, +\infty[.$

8. L'ensemble des solutions de $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geq 5$ est :

a. $[4, +\infty[;$ b. $[2, +\infty[;$ c. $[5, +\infty[.$

9. L'ensemble des solutions de $\lfloor 3x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$ est :

a. $\left[\frac{2}{3}, 1\right[;$ b. $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[;$ c. $[0, 1[;$ d. $\left]1, \frac{4}{3}\right[.$

10. L'ensemble des solutions de $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$ est :

a. $\left] -2\sqrt{2}, -\sqrt{3} \right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2} \right[;$ b. $\left] -2\sqrt{2}, -\sqrt{3} \right[\cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2} \right[;$ c. $\left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2} \right[.$

4 ? ————— QCM sur les bornes supérieures f —————

1. On pose $A = \left\{ \frac{n+2m}{n+m}; (n, m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}$. Vrai ou faux ?

a. A est borné; b. $\max A = 2;$ c. $\min A = 0.$

2. Pour a et b strictement positifs, on pose $A = \left\{ a + (-1)^n \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Vrai ou faux ?

a. A est borné; b. $\sup A = a + b;$ c. $\min A = a - b.$

3. On pose $A = \left\{ \frac{nm}{n^2+m^2}; (n, m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}$. Vrai ou faux ?

a. A est borné; b. $\max A = 1;$ c. $\min A = 0.$

5 ? ————— QCM sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz f —————

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$.

a. $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i^2};$

b. $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^{2/3} \sum_{i=1}^n a_i^{4/3}};$

c. $\sum_{i=1}^n a_i \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}}.$

2. Exercices élémentaires

6 ?

Une équation avec partie entière

Résoudre l'équation $\left\lfloor \frac{x}{1-3x} \right\rfloor = 2.$

7 ?

Une inégalité

Soit x et y dans $] -1, 1[$. Démontrer que $\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| \leq 1.$

8 ?

Une majoration

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$ (sans récurrence).

9 ?

Manipulation des bornes f

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels bornées.

1. On suppose dans cette question que $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $u_k \leq v_\ell$. Comparer $\sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$ et $\inf_{\ell \in \mathbb{N}} v_\ell$.
2. On suppose dans cette question que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \leq v_k$.
 - a. Démontrer que $\inf_{\ell \in \mathbb{N}} u_\ell \leq \inf_{\ell \in \mathbb{N}} v_\ell$ et $\sup_{\ell \in \mathbb{N}} u_\ell \leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} v_\ell$.
 - b. Donner un exemple de suites pour lesquelles $\sup_{\ell \in \mathbb{N}} u_\ell < \inf_{\ell \in \mathbb{N}} v_\ell$.
 - c. Même question avec $\sup_{\ell \in \mathbb{N}} u_\ell > \inf_{\ell \in \mathbb{N}} v_\ell$.

10 ?

Une inégalité à paramètre f

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2+1} \leq x-a$ d'inconnue x réelle.

11 ?

Une belle inégalité f

Soit a et b dans $\mathbb{R}_+$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$.

12 ?

Sinus f

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin n\alpha| \leq n |\sin \alpha|$.

3. Exercices classiques plus techniques

13 ?

Une inégalité f

Soit a et b deux nombres réels. Établir l'inégalité $a + b < (1 + a^2)(1 + b^2)$ en :

- appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz;
- écrivant sous forme canonique $(1 + a^2)(1 + b^2) - a - b$.

14 ?

Majoration d'un polynôme à coefficients positifs f

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Justifier que $\forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^n a_k t^k \leq \frac{\sqrt{a_0^2 + \dots + a_n^2}}{\sqrt{1 - t^2}}$.

15 ?

Une inégalité de Hardy ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. L'objectif est d'établir que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

- Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i} \right) \geq \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 4 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$.
- Établir que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ puis conclure.

16 ?

Minoration d'une somme trigonométrique ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Démontrer que $\sum_{k=1}^n \cos^2 k = \frac{n}{2} + \frac{(\sin n) \cos(n+1)}{2 \sin 1}$. INDICATION : Linéariser $\cos^2$.
- En déduire que $\sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. INDICATION : Comparer x et x^2 pour $x \in [0, 1]$.

17*Une somme de valeurs absolues ff*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(x) := \sum_{k=0}^n |x - k|$.

1. Simplifier $\phi_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_-$ puis pour $x \geq n$.
2. Soit $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Simplifier $\phi_n(x)$ pour $x \in \llbracket \ell, \ell+1 \rrbracket$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $\mu := \min_{x \in \mathbb{R}} \phi_n(x)$. INDICATION : Discuter selon la parité de n .

4. Indications

1 ↪ _____

Seules a, d, e, et h sont vraies.

2 ↪ _____

Aux 10. et 11., utiliser la formule des sommes géométriques.

3 ↪ _____

Attention aux multiplications membre à membre dans une inégalité.

4 ↪ _____

L'ensemble A est borné dans les trois cas.

5 ↪ _____

Tout est vrai. Il faut à chaque fois trouver une décomposition $a_i = x_i y_i$ adaptée.

6 ↪ _____

L'équation équivaut à $2 \leq \frac{x}{1-3x} < 3$.

7 ↪ _____

Il s'agit de démontrer que $-1 \leq \frac{x+y}{1+xy} \leq 1$.

8 ↪ _____

Se souvenir que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

9 ↪ _____

Poser $U := \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $V := \{v_n; n \in \mathbb{N}\}$ afin d'alléger la rédaction. On rappelle que $m \leq \inf U$ équivaut à m est un minorant de U et $\sup U \leq M$ à M est un majorant de U .

10 ↪ _____

L'inéquation est équivalente à $x \geq a$ et $x^2 + 1 \leq (x - a)^2$.

11 ↪ _____

Remarquer que $a + b = 1 \times a + 1 \times b$ (le one-trick).

12 ↻

Raisonnement par récurrence afin d'exploiter les formules d'additions.

13 ↻

Au a., effectuer un one-trick $a + b = 1 \times a + b \times 1$ afin de faire apparaître $\sqrt{1^2 + b^2} \sqrt{a^2 + 1^2}$.

14 ↻

La présence de $\sqrt{a_0^2 + \dots + a_n^2}$ nous oriente vers l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

15 ↻

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au 1. Au 2., déduire du 1. une majoration de $\frac{k}{a_1 + \dots + a_k}$.
Pour conclure au 3., intervertir les sommes dans la somme double.

16 ↻

On a $|\cos k| \geq (\cos k)^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

17 ↻

Au 2., on trouve $(2\ell + 1 - n)x - \frac{\ell(\ell + 1) - (n - \ell)(\ell + n + 1)}{2}$.

5. Solutions

1 ↻

Seules a, d, e, et h sont vraies.

- a. Comme $-1 < a < 2$ et $-4 < -b \leq -2$, on obtient $-5 < a - b < 0$ par superposition des inégalités.
- b. Les réels $a = 0$ et $b = 3,9$ sont un cex.
- c. Les réels $a = -0,9$ et $b = 3,9$ sont un cex.
- d. Si $a \geq 0$, alors $0 \leq ab < 8$. Si $-1 < a < 0$, alors $ab < 0$ et $|ab| < 4$ d'où $-4 < ab < 0$.
- e. On a $|a| < 2$ et $|\frac{1}{b}| < \frac{1}{2}$ d'où $0 \leq |\frac{a}{b}| < 1$.
- f. L'inégalité est clairement fausse si par exemple $a = 0$.
- g. L'inégalité est clairement fausse si par exemple $a = 0$.
- h. L'inégalité est vraie par stricte croissance sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^3$.

Enseignements à tirer de cet exercice

On ne peut pas retrancher membre à membre des inégalités : pour encadrer $a - b$, on encadre a et $-b$ puis on superpose par addition ces deux inégalités. On ne peut faire le produit membre à membre de deux inégalités sauf si tous les nombres en jeu sont positifs. Pour encadrer ab , on commence par faire des disjonctions sur les signes de a et b . Dans le cas où $ab > 0$, il suffit d'encadrer $|ab|$ pour conclure (on se ramène à des termes positifs afin de multiplier membre à membre).

2 ↻

1. Vrai, par croissance de la racine carrée (ou en élevant au carré).
2. Vrai car pour $x \geq 1$ et $y \geq 1$,

$$e^{x+y} - e^y = e^y(e^x - 1) \geq e(e^x - 1)$$
 et $e(e^x - 1)e^{-x} = e(1 - e^{-x}) \geq e(1 - e^{-1}) = e - 1 > 1$.
3. Vrai. Par exemple : $x(1-x) - \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2$.
4. Vrai car $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$.
5. Faux. Cex : $(a, b, u, v) = (2, -2, 1, -1)$.
6. Vrai par l'inégalité triangulaire.
7. Vrai. Pour $x \neq 1$, $\sum_{i=0}^{2n} x^i = \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1}$. et $x^{2n+1} > 1 \iff x > 1$ (car $x \mapsto x^{2n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).
8. Faux : cex $(n, x) = (1, -2)$.
9. Vrai : élever au carré.

10. Vrai. Si $x \geq 1$, alors $x^n \leq x^{n+m} \leq x^{n+m} + 1$. Sinon, on a $x^n \leq 1 \leq 1 + x^{n+m}$.
11. Vrai : étudier les variations de $x \mapsto \cos(x) - 1 + x^2/2$ en dérivant deux fois.
12. Vrai. On a $|\sin x| \leq 1 \leq \sqrt{x}$ si $x \geq 1$ et si $x \in]0, 1]$, on a $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, inégalité clairement vérifiée en 0.

Enseignements à tirer de cet exercice

La disjonction est naturelle car le cas où $x \geq 1$ est direct. Pour l'autre inégalité, la relation $|\sin x| \leq x$ pour $x \geq 0$ permet de conclure sans calcul.

13. Vrai car $x \mapsto x^{2n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
14. Faux : $a < 1/x$ n'est pas équivalent à $x < 1/a$ mais à $0 < x < 1/a$.

3



1. La bonne réponse est b. car $x^4 - x = x(x^3 - 1)$ et $x^3 - 1$ est du signe de $x - 1$ car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Seule a. est correcte. L'inéquation est définie sur $] -\infty, -2] \cup [0, +\infty[$. On conclut en remarquant que l'inéquation est équivalente à $x + 1 \geq 0$ et $(x + 1)^2 \leq x^2 + 2x$.
3. La bonne réponse est b. car l'inéquation équivaut à $1 < x^2 < 5$.
4. Tout est vrai sauf c. En effet, $\sqrt{2} < 9/4$ et on a $\frac{7}{4} \leq |x|$ et $|x + 2| \leq |x - 2| + 4$ (inég. triangulaire) d'où

$$\left| \frac{x}{2} - 1 \right| = \frac{|x - 2|}{2} \leq \frac{1}{4}, \quad \left| 1 - \frac{2}{x} \right| = \frac{|x - 2|}{|x|} \leq \frac{1}{4} \times \frac{4}{7}, \quad |(x - 2)(x + 2)| \leq \frac{1}{4} \times \left(4 + \frac{1}{4} \right) = \frac{17}{16}$$

5. La bonne réponse est a. car l'inéquation équivaut à $\frac{x^2 + x + 1}{x} > 0$, ie $x > 0$ car le trinôme au numérateur est toujours positif.
6. La bonne réponse est b. car l'inéquation est équivalente à $\frac{x^2 + 3x + 1}{x} > 0$.
7. On effectue une disjonction de cas selon les signes de $x - 1$ et $x - 2$: on trouve c.
8. Seul le c. est correct. On remarque que l'expression du premier membre est strictement croissante et vaut 1 en $x = 5$.
9. On trouve b. L'équation équivaut à $[3x] = [x] + 2$. En écrivant $x = [x] + \theta$, ceci est aussi équivalent à $[x] = 1 - \frac{1}{2}[3\theta]$. On en déduit que nécessairement $[x] = 0$ ou 1 et une synthèse permet de conclure.
10. On trouve a. car l'équation équivaut à $2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3$.

4



1. Seuls a. et b. sont vrais. On a en effet $A \subset]0, 2]$ et $2 = \frac{0+2}{0+1}$. En revanche, il est vrai que $\inf A = 0$.

2. Seuls a. et c. sont vrais. En effet, $a - b \leq a + (-1)^n \frac{b}{n} \leq a + \frac{b}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $a - b \in A$.
3. Seul a. est vrai. L'ensemble A est borné car $A \subset]0, 1[$ et puisqu'il est non vide, A admet des bornes. Par l'inégalité AG, on a $nm \leq \frac{n^2 + m^2}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2}$ est un majorant de A et puisque $\frac{1}{2} \in A$, A admet un maximum qui vaut $\frac{1}{2}$. On remarque que 0 est un minorant de A et que la suite de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ converge vers 0 et est à valeurs dans A. On en déduit que $\inf A = 0$. Comme $0 \notin A$, cette borne inférieure n'est pas un minimum.

5



Les trois inégalités sont vraies et sont des applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le a. utilise « the 1-trick » et le b. un « ré-équilibrage » :

$$\sum_{i=1}^n a_i \times 1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n a_i^{1/3} \times a_i^{2/3} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^{2/3}} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^{4/3}}$$

Le c. s'obtient par la décomposition $a_i = \sqrt{i} \times \frac{a_i}{\sqrt{i}}$:

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n i} \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}} \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}}$$

car $\sum_{i=1}^n i \leq n^2$ et par croissance de la racine carrée.

6



L'équation équivaut à $2 \leq \frac{x}{1-3x} < 3$, i.e. $\frac{x-2(1-3x)}{1-3x} \geq 0$ et $\frac{3(1-3x)-x}{1-3x} > 0$. On trouve $\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{10} \right[$.

7



$\Rightarrow$ On a $\frac{x+y}{1+xy} - 1 = \frac{x+y-xy-1}{1+xy} = \frac{x-1-y(x-1)}{1+xy} = \frac{(x-1)(1-y)}{1+xy} \leq 0$ car $1+xy > 0$, $x-1 < 0$ et $1-y > 0$.

$\Rightarrow$ De même, $\frac{x+y}{1+xy} + 1 = \frac{x+y+xy+1}{1+xy} = \frac{x+1+y(x+1)}{1+xy} = \frac{(x+1)(1+y)}{1+xy} \leq 0$ car $1+xy > 0$, $x+1 > 0$ et $1+y > 0$.

Commentaires

$\Rightarrow$ Il est naturel de tenter une factorisation afin d'étudier le signe d'une expression.

$\Rightarrow$ L'inégalité $1+xy > 0$ est justifiée par $xy \leq |xy| \leq 1$.

$\Rightarrow$ On peut aussi trouver le signe de $x+y-xy-1$ en étudiant à y fixé dans $] -1, 1[$ les variations sur $] -1, 1[$ de $x \mapsto x+y-xy-1$.

$\Rightarrow$ On peut aussi remarquer que l'inégalité est équivalente à $(x+y)^2 \leq (1+xy)^2$, i.e. $x^2y^2 - x^2 - x^2 + 1 \geq 0$. On conclut en remarquant que $x^2y^2 - x^2 - x^2 + 1 = (1-x^2)(1-y^2)$.

8

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n k} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$.

9

Notons $U := \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ et $V := \{v_n; n \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme u_k est un minorant de V , on a $u_k \leq \inf V$. Ainsi $\inf V$ est un majorant de U d'où $\sup U \leq \inf V$.
2. **a.** On reprend les notations de la question précédente.
 - $\Rightarrow$ Tout minorant de U est aussi un minorant de V . Le plus grand minorant de U est donc un minorant de V : ainsi $\inf U \leq \inf V$.
 - $\Rightarrow$ Tout majorant de V est aussi un majorant de U . Le plus petit majorant de V est donc un majorant de U : ainsi $\sup U \leq \sup V$.
- b.** Il suffit de choisir $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c.** Il suffit de choisir $u_0 = -2$ et $v_0 = -1$, puis $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

10

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2+1} \leq x-a$ d'inconnue x réelle. L'inéquation est équivalente à $x \geq a$ et $x^2+1 \leq (x-a)^2$, i.e. $x \geq a$ et $2ax \leq a^2-1$. Pour continuer les calculs, il faut commencer une disjonction de cas sur le signe de a .

$\Rightarrow$ Cas 1 : $a = 0$. Il n'y a pas de solution.

$\Rightarrow$ Cas 2 : $a > 0$. On vérifie que $\frac{a^2-1}{2a} < a$ et il n'y a donc aucune solution.

$\Rightarrow$ Cas 3 : $a < 0$. On vérifie que $\frac{a^2-1}{2a} > a$ et l'ensemble des solutions est $\left[\frac{a^2-1}{2a}, +\infty \right[$.

11

On remarque que

$$|a+b|^2 = |a \times 1 + b \times 1|^2 \leq (1^2+1^2)(a^2+b^2) = 2(a^2+b^2)$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc, après élévation au carré,

$$(a+b)^4 \leq 4(a^2+b^2)^2.$$

Mais à nouveau d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a^2+b^2|^2 = |a^2 \times 1 + b^2 \times 1|^2 \leq (1^2+1^2)((a^2)^2+(b^2)^2) = 2(a^4+b^4)$$

et donc

$$(a+b)^4 \leq 4(a^2+b^2)^2 \leq 4 \times 2(a^4+b^4) = 8(a^4+b^4).$$

12 ↻

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $HR(n) : |\sin n\alpha| \leq n |\sin \alpha|$.

⇒ $HR(0)$ est clairement vraie car les deux membres de l'inégalité sont nuls lorsque $n = 0$.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $HR(n)$. On a :

$$\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha + \alpha) = \sin(n\alpha) \cos \alpha + \cos(n\alpha) \sin \alpha$$

ainsi :

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\alpha)| &\leq \underbrace{|\sin(n\alpha) \cos \alpha| + |\cos(n\alpha) \sin \alpha|}_{\text{(par l'inégalité triangulaire)}} \\ &= |\sin(n\alpha)| \times |\cos \alpha| + |\cos(n\alpha)| \times |\sin \alpha| \\ &\leq n |\sin \alpha| \times 1 + 1 \times |\sin \alpha| = (n+1) |\sin \alpha| \quad (\text{par } HR(n) \text{ et } |\cos| \leq 1) \end{aligned}$$

d'où $HR(n+1)$.

13 ↻

a. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$1 \times a + b \times 1 \leq \sqrt{1+b^2} \sqrt{a^2+1} \leq (1+b^2)(1+a^2)$$

car $x \geq \sqrt{x}$ pour tout réel $x \geq 1$.

⇒ Cette inégalité est stricte pour $x > 1$. Ainsi, pour a ou b non nuls, $a + b < (1+a^2)(1+b^2)$.

⇒ Si $a = 0$ et $b = 0$, l'inégalité précédente est stricte car les deux membres sont respectivement 0 et 1.

b. On a $(1+a^2)(1+b^2) - a - b = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + a^2b^2 + \frac{1}{2} > 0$.

14 ↻

Soit t dans $[0, 1[$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=0}^n a_k t^k \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n t^{2i}} = \sqrt{\sum_{i=0}^n a_i^2} \sqrt{\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}}$$

en appliquant la formule des sommes géométriques (la raison t^2 étant distincte de 1). On conclut en remarquant que, puisque t est entre 0 et 1, on a $\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \leq \frac{1}{1-t^2}$, et donc $\sqrt{\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}} \leq \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ par croissance de la racine carrée.

15 ↻

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k \sqrt{a_i} \frac{i}{\sqrt{a_i}} \right)^2}_{= \frac{k^2(k+1)^2}{4}} &\leq \sum_{i=1}^k a_i \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a, par la question 1. $\frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i}$. Puis, par superposition :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{a_i} \right) = 4 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \geq \frac{2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{2}{k(k+1)^2}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes, on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^n \frac{2}{k(k+1)^2} \leq 2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i} \sum_{k=i}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{a_i}.$$

16



1. On a $\cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ pour tout réel x . Puisque $e^{2i} \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos^2 k &= \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k)+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{2ik} \right) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{2i} \frac{e^{2in} - 1}{e^{2i} - 1} \right) \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)} \frac{\sin n}{\sin 1} \right) = \frac{n}{2} + \frac{(\sin n) \cos(n+1)}{2 \sin 1} \end{aligned}$$

2. Puisque $\cos$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a $|\cos| \geq \cos^2$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \sum_{k=1}^n \cos^2 k = \frac{n}{2} + \frac{(\sin n) \cos(n+1)}{2 \sin 1} \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2 \sin 1}$$

car $(\sin n) \cos(n+1) \geq -1$ et $2 \sin 1 > 0$. Comme $\sin$ est croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{\pi}{2} > 1 > \frac{\pi}{4} > 0$, on a $\sin 1 \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ d'où $-\frac{1}{2 \sin 1} \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ puis

$$\sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

17



Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(x) := \sum_{k=0}^n |x - k|$.

1. $\Rightarrow$ Pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n (k - x) = (n+1) \left(\frac{n}{2} - x \right)$.

$\Rightarrow$ Pour $x \geq n$, on a $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n (x - k) = (n+1) \left(x - \frac{n}{2} \right)$.

2. Soit $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x \in \llbracket \ell, \ell+1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{\ell} (x - k) + \sum_{k=\ell+1}^n (k - x) = -\frac{\ell(\ell+1)}{2} + (\ell+1)x - (n-\ell)x + \frac{(n+\ell+1)(n-\ell)}{2} \\ &= (2\ell+1-n)x - \frac{\ell(\ell+1) - (n-\ell)(\ell+n+1)}{2} \end{aligned}$$

3. On déduit des questions précédentes l'étude suivante :

⇒ Cas 1 : $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction ϕ_n décroît sur $] -\infty, m]$ puis croît sur $[m, +\infty[$.

⇒ Cas 2 : $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. La fonction ϕ_n décroît sur $] -\infty, m]$, est constante sur $[m, m + 1]$ puis croît sur $[m + 1, +\infty[$.

Dans tous les cas, ϕ_n admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en m et valant respectivement $m^2 + m$ et $m^2 + m + 1$ dans les cas 1 et 2.