AN 4 | Fonctions numériques

Les exercices portent sur les propriétés générales et les rappels sur les fonctions usuelles (trigonométriques, hyperboliques, exponentielles et logarithmes, puissances).

Port de mer au soleil couchant, Claude Lorrain

4 Fonctions numériques 1
1 Quizz 2
2 Exercices élémentaires 4
3 Exercices classiques plus techniques 5
4 Indications 7
5 Solutions 9

1. Quizz

1 Vrai ou faux ? f

1. $\dfrac{\sqrt{x}^x}{x^{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors f est croissante au voisinage de $+\infty$.
3. Une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$ est constante.
4. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\cdot$
5. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $\sqrt{f\left(\sqrt{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
6. Si $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ou $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
7. Si $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ou $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
8. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors f est du signe de ℓ au voisinage de $+\infty$.
9. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \iff \alpha \leqslant 1$.
10. Si f n'a pas de limite en $+\infty$ et $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f\circ u$ n'a pas de limite en $+\infty$.
11. Si f a une limite réelle en $+\infty$, alors f est bornée au voisinage de $+\infty$.
12. Si f est croissante et $\left(f(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
13. Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, alors $f(x)-g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
14. Si $f(x)-g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.

2 QCM sur l'asymptotique f

1. Pour tout $x>0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot$

   a. $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$; **b.** $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

2. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $f : x \longmapsto \dfrac{\lfloor ax \rfloor}{\lfloor bx \rfloor}\cdot$ Vrai ou faux ?

   a. f n'a pas de limite en $+\infty$; **b.** $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\lfloor a \rfloor}{\lfloor b \rfloor}$; **c.** $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{a}{b}\cdot$

3. Soit $a>1$ et $b>1$ deux réels, $u : x \longmapsto x^x$, $v : x \longmapsto a^{b^x}$ et $h = \dfrac{u}{v}\cdot$ Vrai ou faux ?

a. $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$;

b. h n'a pas de limite ne $+\infty$;

c. $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4. Soit $f : x \mapsto x - \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$. Vrai ou faux ?

a. f n'a pas de limite en $+\infty$;

b. $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

5. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, on pose $f(x, y) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^y$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \lim\limits_{y\to+\infty} f(x, y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x, y)$;

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, x) = 0$;

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, x) = 1$;

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, x) = e^{-1}$.

6. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ bornée. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = \sup f\left([0, x[\right)$. Vrai ou faux ?

a. g admet des limites réelles à droite et à gauche en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$;

b. g admet une limite réelle en $+\infty$;

c. $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x_0) \leqslant g(x_0^+)$.

d. $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x_0^-) \leqslant f(x_0)$.

3 — *Vrai ou faux ? f*

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
3. L'ensemble des solutions de $x + |x| \geqslant 2$ est $[1, +\infty[$.
4. Pour tout $x > 0$, $|\ln x| \leqslant |x - 1|$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ \left(x^{m^n}\right)^n = x^{m^{n+1}}$.
6. Pour tout $(u, v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $u^{\ln v} = v^{\ln u}$.
7. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^a + e^b}{2}$.
8. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt[n]{x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
9. La fonction $|\sin| + |\cos|$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique.
10. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt[n]{x+y} \leqslant \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$.
11. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < 1$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
12. La composée de deux fonctions impaires est paire.
13. Si g est périodique, alors $f \circ g$ est périodique.
14. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|\cos x| \leqslant x$.
15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto |\cos(n\pi x)|$ est $\frac{1}{n}$-périodique.
16. L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par sin.
17. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\sqrt{\dfrac{1 - \tanh(x)}{1 + \tanh(x)}} = x$.
18. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$.

2. Exercices élémentaires

4 — *Une limite f*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, existence et calcul de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-x - \ln n}\right)^n$.

5 — *Une salve d'équivalents f*

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage du point indiqué

1. $\dfrac{\sin x}{\ln\left(1+x^2\right)}$ en 0 ;
2. $x^x - 1$ en $0+$;
3. $\dfrac{e^{(\tan x)^2} - 1}{e^{\cos x} - e}$ en 0 ;
4. $\tan(x)\,(\tan(2x))^2$ en $\dfrac{\pi}{2}$;
5. $x^x - 1$ en 1 ;
6. $x^x - e^x$ en e ;
7. $x^{1+\frac{1}{x}} - x$ en $+\infty$;
8. $e^x - (\ln x)^x$ en $+\infty$;
9. $1 - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$;
10. $\tan(3x) - \sin(2x)$ en 0 ;
11. $e^x - \cos x$ en 0 ;
12. $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}$ en 0.

6 — *Comparaison f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

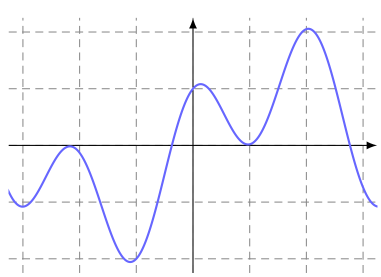
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, étudier le comportement de $f(x) - \lambda x$ en $+\infty$.

7 — *Une équation*

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

8 — *Symétries f*

Tracer les courbes de $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(2-x)$, $x \mapsto f(2x)$ et $x \mapsto 2 - f(x)$ à partir de celle de f :



9 — *Etude d'une suite de fonctions* f

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Quelle est la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Prouver que f_n admet un maximum sur $[0,1]$, noté u_n.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

3. Exercices classiques plus techniques

10 — *une inéquation fonctionnelle* f

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant e^{y-x}$

11 — *Composées* f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$ *si et seulement si* $f\left(x^3\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$;
2. $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$ *si et seulement si* $f\left(x^2\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell$.

On justifiera avec soin son propos par une démonstration ou la donnée d'un contre-exemple détaillé.

12 — *Un grand classique* f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En appliquant l'inégalité $e^x \geqslant 1+x$ à deux valeurs de x, établir que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.
2. En déduire que $0 \leqslant e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{4}{n}\cdot$

13 — *Puissances et fonctions trigonométriques* ff

1. Étudier les variations de la fonction $\theta : x \mapsto 2^{-x}x$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les variations de $x \mapsto 2^{\sin x} + 2^{\cos x}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ 3 \leqslant 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \leqslant 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

14 — *Un produit* ff

Soit $\alpha \in [0,1]$.

1. Démontrer que, pour tout réel positif x, $(1+x)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^{\alpha}$.

15 — *Partie entière* ff

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t - \dfrac{\lfloor \sqrt{2}t \rfloor}{\sqrt{2}}$.

1. Montrer que f est bornée.

2. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? On justifiera avec soin.

4. Indications

1

Au 1., écrire le quotient sous la forme d'une exponentielle. Utiliser la quantité conjuguée au 4.

2

On a $\lfloor x \rfloor \sim x$ en $\pm\infty$. Au 6., on remarquera que g est croissante.

3

Au 10., on pourra utiliser la formule du binôme.

4

On trouve $e^{-e^{-x}}$.

5

Lorsque $x_0 \neq 0$, on aura intérêt à effectuer le changement de variable $x := x_0 + u$ pour étudier le comportement de $f(x)$ en x_0.

6

Remarquer que $x = o\big(f(x)\big)$ en $+\infty$.

7

Passer au logarithme.

8

Les courbes se déduisent respectivement de celle de f par la réflexion d'axe $(\mathrm{O}x)$, la réflexion d'axe $\Delta : x = 1$, une « compression de moitié » selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ et la réflexion d'axe $\Delta' : y = 1$.

9

Écrire u_n sous forme exponentielle afin de déterminer sa limite.

10

On trouve que f est constante.

11

Le 1. est vrai mais le 2. est faux.

12

Appliquer l'inégalité à $x = \frac{1}{n}$ puis à une valeur négative de x bien choisie.

13

Exprimer f' au moyen de θ.

14

Étudier une fonction au 1.

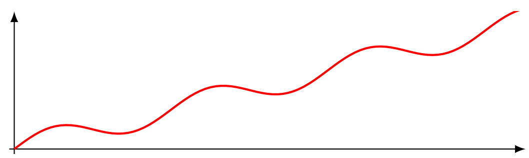
15

Encadrer classiquement la partie entière au 1. et utiliser le critère séquentiel au 2.

5. Solutions

1

1. Vrai car
$$\frac{\sqrt{x}^x}{x^{\sqrt{x}}}=\exp\left(\frac{x\ln x}{2}-\sqrt{x}\ln x\right)=\exp\left(\frac{x\ln x}{2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)$$
2. Faux. On peut diverger vers $+\infty$ tout en oscillant. Cf. $x\longmapsto x+2\sin(x)$:



3. Vrai. Notons T une période de f, ℓ sa limite en $+\infty$ et fixons x dans $\mathbb{R}$. La suite $\big(f(x+n\mathrm{T})\big)_{n\in/\mathrm{N}}$ est constante de limite ℓ donc $f(x)=\ell$.
4. Vrai car
$$\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{\sqrt{1+x^{-1/2}}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}$$
5. Vrai par composition des limites.
6. Faux. Contre-exemple : $f(x)=g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}x$.
7. Faux. Contre-exemple : $f=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, $g=\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.
8. Vrai, c'est du cours.
9. Faux. Pour $x>0$, on a $x^{\alpha-1}-x^{\alpha}<x^{\alpha}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant x^{\alpha-1}$. On en déduit que $x^{\alpha}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\xrightarrow[x\to0^+]{}0\iff\alpha>1$.
10. Faux. Contre-exemple : $f(x)=\cos x,\ u(x)=2\pi\lfloor x\rfloor$.
11. Vrai, c'est du cours.
12. Vrai car pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(\lfloor x\rfloor)\leqslant f(x)\leqslant f(\lfloor x\rfloor+1)$ (théorème d'encadrement et composition des limites).
13. Faux. Contre-exemple : $f(x)=x+1,\ g(x)=x$.
14. Vrai. Puisque $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et $\frac{g(x)}{f(x)}-1=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ par opérations sur les limites.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ À propos du 1. : pour résoudre des formes indéterminée faisant intervenir des puissances, on écrit l'expression au moyen de l'exponentielle et on utilise les croissances comparées (on factorise par le terme « dominant »).

⇛ Au 4., on utilise la quantité conjuguée.

⇛ Pour le 8. : comme dans le cas des suites numériques, il est toujours intéressant de se poser la question de la monotonie (même si cela n'est pas explicitement demandé).

⇛ Au 11., c'est la réciproque qui est vraie : si $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f \circ u$ n'a pas de limite en $+\infty$, alors f n'a pas de limite en $+\infty$.

⇛ Au 14., les propriétés sont très différentes, on peut avoir $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (choisir $f(x) = x + \sqrt{x}$ et $g(x) = x$).

2

1. Seul a. est vrai : sur $\mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \sqrt{x}$ (on applique le théorème d'encadrement).
2. Seul c. est vrai. On a $\dfrac{\lfloor ax \rfloor}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$ car $\forall x > 0$, $a - x^{-1} < \dfrac{\lfloor ax \rfloor}{x} \leqslant a$ (théorème d'encadrement). On conclut en remarquant que $\dfrac{\lfloor ax \rfloor}{\lfloor bx \rfloor} = \dfrac{\lfloor ax \rfloor}{x} \times \dfrac{x}{\lfloor bx \rfloor}$ pour x assez grand.
3. Seul c. est vrai :
$$h(x) = \exp\left(x \ln x - e^{x\ln b} \ln a\right) = \exp\left(-e^{x\ln b}\left(\ln a - \frac{x \ln x}{e^{x\ln b}}\right)\right) \quad \text{et} \quad \frac{x\ln x}{e^{x\ln b}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
par croissances comparées.
4. Seul b. est vrai car $x - \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor} = \dfrac{x^2 - \lfloor x^2 \rfloor}{x + \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}}$ et $x^2 - \lfloor x^2 \rfloor \in [0,1[$ (on en déduit un encadrement).
5. Seul d. est vrai. En effet $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^y \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^y \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Et
$$f(x,x) = \exp\left(-\frac{\ln\left(1 + x^{-1}\right)}{x^{-1}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-1} \quad \text{car} \quad \frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} \ln' 1 = 1 \text{ (taux d'accroissement)}$$
6. Seuls a., b. et c. sont vrais. La fonction g est correctement définie (propriété de la borne supérieure). Si M est un majorant de f, alors M majore également g. Donc g admet une limite réelle en $+\infty$ et des limites réelles à droite et à gauche en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ (théorème de la limite monotone). Soit $x < x'$. On a $[0, x[\subset [0, x'[$ donc $f(x) \leqslant f(x')$. Soit $x > x_0$. On a $f(x_0) \in f([0, x[)$ donc $f(x_0) \leqslant g(x)$ puis $f(x_0) \leqslant g(x_0^+)$ (passage à la limite à droite dans l'inégalité). Voici un contre exemple à la dernière propriété : $f(x) = -1$ si $x < 1$, $f(1) = -2$ et $f(x) = 1$ si $x > 1$. En effet, on a $g(1^-) = -1$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Au 1. : cf. le 1. du Vrai ou Faux et la remarque correspondante.

⇛ Au 6., il est naturel d'étudier la monotonie de la fonction.

⇛ Le 5. tourne autour de deux erreurs classiques.

- La première est l'interversion des limites : même en cas d'existence des limites, on n'a pas toujours $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)$. Plus généralement, on n'a pas toujours le droit d'écrire (même lorsque les expressions ont un sens) :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\,,\ \text{ect.}$$

En effet, les intégrales et les dérivées sont définies au moyen d'un passage à la limite. Cependant sous certaines conditions suffisantes, ces égalités sont vérifiées (c'est l'objet de quelques théorèmes dits d'interversion, qui figurent au programme de seconde année).

- La seconde est la forme indéterminée 1^∞ : si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $u(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$, alors on ne peut rien dire en général du comportement de $f(x)^{u(x)}$ quand $x\to+\infty$, il faut une étude plus poussée (nous développerons des outils adaptés dans le chapitre d'analyse asymptotique).

3

1. Faux. L'expression est nulle si et seulement si k est impair.
2. Vrai.
3. Vrai car $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $-\pi/2 \leqslant \pi - x \leqslant \pi/2$ pour $x\in[\pi/2,\pi]$.
4. Faux. L'inégalité $\ln x \leqslant x-1$ est valable pour tout $x>0$. Pour $0<x<1$, $\ln x < x-1<0$ d'où $|\ln x| > |x-1|$.
5. Faux, la bonne valeur est x^{nm^n}.
6. C'est vrai car $u^{\ln v} = e^{(\ln u)(\ln v)}$.
7. Vrai. Voici quelques idées de démonstration : l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, l'inégalité AG, étudier une fonction de la variable a à b fixé, etc.
8. Faux. On a $\sqrt[n]{x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{\ln x}{n}}$.
9. Vrai par le formulaire de trigonométrie.
10. Vrai. Comme les deux expressions sont positives, il suffit de comparer leurs puissances n-èmes :

$$\left(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}\right)^n - (x+y) = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sqrt[n]{x}^k\,\sqrt[n]{y}^{n-k} \geqslant 0$$

11. Faux. Pour $\alpha\in]0,1[$, on a $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
12. Faux. La bonne réponse est « impaire ».
13. Vrai.
14. Faux. Cex : $x=0$.
15. Vrai car $|\cos|$ est π-périodique.
16. Vrai car le sinus est à valeurs dans $[-1,1]$, qui est inclus dans $[-\pi/2,\pi/2]$.
17. Faux. L'expression se simplifie en $2x$ (revenir aux exponentielles).
18. Vrai. Développer puis simplifier le membre de droite en revenant aux exponentielles.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇛ Les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles sont à connaître sans aucune hésitation.
- ⇛ À propos du 4. : il faut connaître les petites inégalités : $\sin x \leqslant x$, $\ln x \leqslant x-1$, $e^x \geqslant 1+x$, etc.

4 ↺

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$n\ln\left(1-e^{-x-\ln n}\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n}e^{-x}\right) \sim n \times \frac{-e^{-x}}{n} = -e^{-x}$$

Ainsi, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-e^{-x-\ln n}\right)^n = \exp\left(-e^{-x}\right)$.

5 ↺

On notera systématiquement $f(x)$ l'expression étudiée.

1. On a $\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ en 0.
2. On a $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \sim x\ln x$ en 0+ car $x\ln x \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$.
3. On a $\frac{e^{(\tan x)^2}-1}{e^{\cos x}-e} = e^{-1}\frac{e^{(\tan x)^2}-1}{e^{\cos x-1}-1} \sim e^{-1}\frac{(\tan x)^2}{\cos x-1} \sim \frac{x^2}{-e\frac{x^2}{2}} = -2e$ en 0, car $\tan x$ et $\cos x - 1$ tendent vers 0 avec 0.
4. On a $\tan\left(u+\frac{\pi}{2}\right)(\tan(2u+\pi))^2 = \frac{(\tan 2u)^2}{-\tan u} \sim \frac{u^2}{-u} = -u$ en 0 d'où $\tan(x)(\tan(2x))^2 \sim \frac{\pi}{2} - x$ en $\frac{\pi}{2}$.
5. On a $(1+u)^{1+u} - 1 = e^{(1+u)\ln(1+u)} - 1 \sim (1+u)\ln(1+u) \sim u$ en 0 car $(1+u)\ln(1+u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Ainsi $x^x - 1 \sim x-1$ en 1.
6. On a $(e+u)^{e+u} - e^{e+u} = e^{e+u}\left(\left(1+\frac{u}{e}\right)^{e+u}-1\right) = e^{e+u}\left(e^{(e+u)\ln\left(1+\frac{u}{e}\right)}-1\right) \sim e^e(e+u)\ln\left(1+\frac{u}{e}\right) \sim e^e \times e \times \frac{u}{e} = e^e u$ en 0 d'où $f(x) \sim e^e(x-e)$ en e.
7. On a $x^{1+\frac{1}{x}} - x = x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right) \sim x \times \frac{\ln x}{x} = \ln x$ en $+\infty$ car $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
8. Comme $\left(\frac{e}{\ln x}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a $e^x - (\ln x)^x \sim -(\ln x)^x$ en $+\infty$.
9. On a $1 - \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \sim \frac{2e^{-x}}{e^x} = 2e^{-2x}$ en $+\infty$.
10. On a $\tan(3x) = 2x + o(x)$ et $\sin(2x) = 2x + o(x)$ d'où $\tan(3x) - \sin(2x) = x + o(x) \sim x$ en 0.
11. On a $e^x = 1 + x + o(x)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) = 1 + o(x)$ d'où $e^x - \cos x = x + o(x) \sim x$ en 0.
12. On a $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ d'où $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x} = -\frac{x}{6} + o(x) \sim -\frac{x}{6}$ en 0.

6 ↺

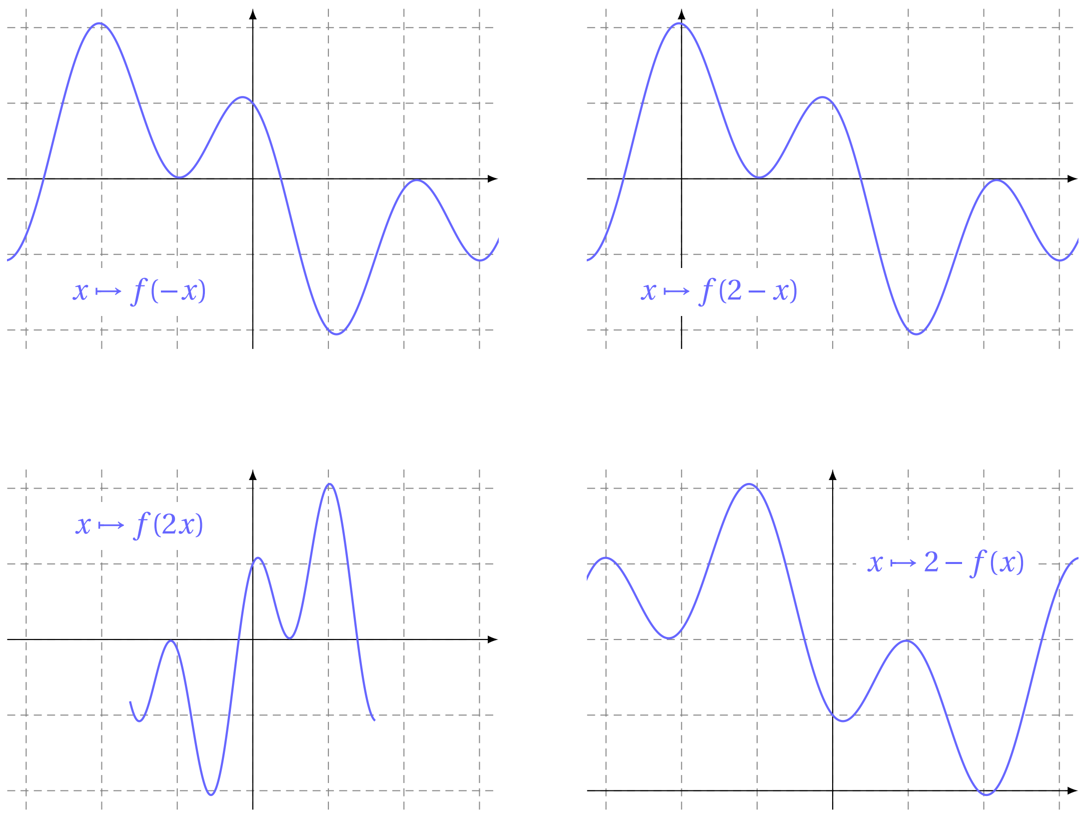
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. comme $x = o\big(f(x)\big)$ en $+\infty$, on a $f(x) - \lambda x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

7 ↺

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$ est équivalente par application du logarithme à $\sqrt{x}\ln x = \frac{x}{2}\ln x$, ie $\left(2\sqrt{x}-x\right)\ln x = 0$, soit $x = 2\sqrt{x}$ ou $x = 1$, ou encore $\sqrt{x} = 2$ ou $x = 1$. On en déduit que les solutions sont 1 et 4.

8 ↺

Les courbes se déduisent respectivement de celle de f par la réflexion d'axe $(\mathrm{O}x)$, la réflexion d'axe $\Delta : x = 1$, une « compression de moitié » selon l'axe $(\mathrm{O}x)$ et la réflexion d'axe $\Delta' : y = 1$.



9 ↺

Si $0 \leqslant x < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ donc dans tous les cas,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet ensemble,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

La fonction est donc croissante sur $[0, n/(n+1)]$ et décroissante sur $[n/(n+1), 1]$: elle admet un maximum en $n/(n+1)$ valant :

$$u_n = f_n\big(n/(n+1)\big) = \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

D'après le résultat de l'exercice 4, on a

$$\lim_{n\to+infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1},$$

ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0.$$

10

⇛ Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Fixons y dans $\mathbb{R}$. Comme $e^{y-x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, on a $f(x)\xrightarrow[y\to+\infty]{}f(y)$ (théorème d'encadrement). Ainsi, par unicité de la limite, f est constante.

⇛ Réciproquement, il est immédiat que les fonctions constantes vérifient les conditions de l'énoncé.

11

1. Notons $\phi : x\mapsto x^3$. La fonction ϕ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue, sa réciproque $\phi^{-1} : x\mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est donc aussi continue. L'équivalence est claire par composition des limites en remarquant que $f=g\circ\phi$ et $g=f\circ\phi^{-1}$.
2. L'implication $f(x)\xrightarrow[x\to0]{}0 \implies f\left(x^2\right)\xrightarrow[x\to0]{}0$ est vraie (par composition des limites). La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de

$$f(x):=\begin{cases}0 & \text{si } x\geqslant 0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

12

1. En appliquant à $x=\frac{1}{n}$ puis $x=-\frac{1}{n+1}$, on aboutit à :
   - ⇛ $e^{\frac{1}{n}}\geqslant 1+\frac{1}{n}>0$ d'où $e=\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
   - ⇛ $e^{-\frac{1}{n+1}}\geqslant 1-\frac{1}{n+1}>0$ d'où $e^{-1}=\left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}\geqslant\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. d'où $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\geqslant e$.
2. La minoration a déjà été établie. Par le 1., on a

$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}\leqslant\frac{e}{n}\leqslant\frac{4}{n}$$

   car, en appliquant le 1. à $n=1$, on trouve que $e\leqslant 4$.

13

1. On trouve facilement qu'elle est croissante sur $]-\infty,1/\ln 2]$ et décroissante sur $[1/\ln 2,+\infty[$ en calculant le signe de sa dérivée.

2. Cette fonction, que nous noterons f, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \ln 2\left(\cos x 2^{\sin x} - \sin x 2^{\cos x}\right) = \cos x 2^{\sin x} \ln 2\left(1 - \frac{\theta(\sin x)}{\theta(\cos x)}\right)$$

Pour $x \in [0, \pi/4]$, $\sin x \leqslant \cos x \leqslant 1 < 1/\ln 2$ donc $f'(x) \geqslant 0$ par croissante de θ sur $]-\infty, 1/\ln 2]$.

3. La fonction à borner étant paire et $(\pi/2)$-périodique, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi/4]$. Sur cet intervalle, elle coïncide avec f d'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = 3 \leqslant 2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \leqslant 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = f(\pi/4)$$

14

1. Posons $\phi : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions dérivables et, sur cet intervalle, $\phi'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \geqslant 0$ car $(1+x)^{\alpha-1} \leqslant 1$. On en déduit que ϕ est décroissante et puisque $\phi(0) = 0$, ϕ est positive.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $1 + \dfrac{\alpha}{k} \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^\alpha > 0$. Ainsi

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = (n+1)^\alpha$$

15

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $t - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{\lfloor \sqrt{2} t \rfloor}{\sqrt{2}} \leqslant t$. Ainsi, $f(\mathbb{R}) \subset \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

2. Comme

$$f\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{n}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

on déduit du critère séquentiel que f n'a pas de limite en $+\infty$.