AN 5 | Fonctions continues

Étude des propriétés locales et globales des fonctions continues sur un intervalle.

Carré noir sur fond blanc, Kazimir Malevitch

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ? ff*

1. L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
2. L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.
3. L'image par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'une partie bornée est bornée.
4. L'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.
5. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique est bornée.
6. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique est bornée.
7. Si $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues.
8. Si $(f, g) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)^2$ vérifie $|f| = |g|$, alors $f = g$ ou $f = -g$.
9. Si $(f, g) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ vérifie $|f| = |g|$, alors $f = g$ ou $f = -g$.
10. La composée de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes est lipschitzienne.
11. Le produit de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes est lipschitzien.
12. La somme de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes est lipschitzienne.
13. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues et vérifient $f\big|_{\mathbb{Q}} = g\big|_{\mathbb{Q}}$, alors $f = g$.
14. Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et positive, alors f admet un minimum.
15. Pour tout $a > 0$, il existe une bijection $\phi : \mathbb{R} \to]-a, a[$ continue.
16. Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si f est continue en 0, $f(0) \neq 0$ et g n'est pas continue en 0, alors fg n'est pas continue en 0.
17. L'équation $xe^{-x} = \lambda$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet deux solutions $\iff \lambda < e^{-1}$.

2 — *Vrai ou faux ? ff*

1. On note $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

   a. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point ;

   b. $x \mapsto x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ n'est continue en aucun point ;

   c. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est périodique ;

   d. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x + y) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(y)$.

2. Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ majorées, continues telles que $f < g$.

   a. $\sup f \leqslant \sup g$;

   b. $\sup f < \sup g$;

   c. si I est un segment, alors $\max f < \max g$;

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne :

a. sur $[0,1]$; **b.** sur $]0,1]$; **c.** sur $[1,+\infty[$.

4. Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ une fonction continue.

a. f admet un point fixe ;
b. I segment $\implies$ f admet un point fixe ;
c. $\mathrm{I} = [0,1[$ $\implies$ f admet un point fixe ;
d. $\mathrm{I} =]0,1]$ $\implies$ f admet un point fixe.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -\infty$.

a. f n'est pas surjective ;
b. f continue $\implies$ f admet un maximum.

6. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues à droite en tout point de $[0,1]$.

a. f est majorée sur $[0,1]$;
b. f est minorée sur $[0,1]$;
c. $f \circ g$ est continue à droite en 0.

7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$.

a. f est bornée ;
b. f n'admet pas de maximum ;
c. $\sup f < 1$;
d. $\min f > -1$.

2. Exercices élémentaires

3 — *Une équation scalaire*

Montrer que l'équation E : $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}$.

4 — *Une étude de continuité*

En quel points de $\mathbb{R}$, la fonction $\phi : x \mapsto \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est-elle continue ?

5 — *Croisement de deux fonctions*

Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$. Démontrer qu'il existe un réel $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = g(a)$.

6 — *Un inverse*

Soit $f : [0,1] \to]0,1]$ continue. Justifier que $\dfrac{1}{f}$ est bornée.

7 — *Une suite implicite f*

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un réel $x_n \in [0,1]$ tel que : $f(x_n) = x_n^n$.
2. On suppose désormais que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.
   - **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel x_n est unique.
   - **b.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
   - **c.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et donner sa limite.

8 — *Barycentres f*

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $f(a) \neq f(b)$, et u, v des réels strictement positifs. Montrer que

$$\exists c \in \,]a,b[,\ \ uf(a) + vf(b) = (u+v)f(c)$$

9 — *Une équation fonctionnelle de cocnours f*

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\sin x)$.

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$. Étudier la suite définie par $u_0 := x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
2. En déduire que f est constante.

10 — *Avis de recherche f*

Existe-t-il une fonction continue surjective de $]0,1[$ sur $[0,1]$?

3. Exercices classiques plus techniques

11 — *Composées f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

12 — *À bornes égales f*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, f et g deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continues et vérifiant

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b} f(t) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} g(t)$$

Montrer qu'il existe c appartenant à $[a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

13 — *Une composée f*

Soit f et θ deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que θ soit périodique.

Prouver l'existence et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(f\circ\theta)(x)}{x}$.

14 — *Une équation fonctionnelle ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x^2\right) = f(x)$. Montrer que f est constante.

15 — *Une impossibilité ff*

Soit f une fonction continue surjective de $]0,1[$ sur $[0,1]$. Montrer que f ne peut être injective.

16 — *Fonctions continues divergeant vers −∞ en +∞ ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Démontrer que f admet un maximum.

17 — *Stetige Bijektion mit unstetige Umkehrabbildung ff*

Man finde Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion $f : A \to B$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.
Remarque : « stetig » signifie continu en Allemand.

4. Indications

1

On pourra dessiner, chercher des exemples ou des contre-exemples au moyen de fonctions usuelles ou de fonctions définies par morceaux. Le 8. vrai mais le 9. est faux.

2

On cherchera des exemples ou des contre-exemples au moyen de fonctions usuelles ou définies par morceaux.

3

Appliquer le TVI.

4

La fonction ϕ est continue en tant point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{n}{2} \,;\, n \in \mathbb{Z} \right\}$ et discontinue en tout point de $\left\{ \frac{n}{2} \,;\, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

5

S'intéresser à $\delta := f - g$.

6

La fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue.

7

Considérer $x \longmapsto f(x) - x^n$.

8

Vérifier que $\dfrac{uf(a) + vf(b)}{u+v} \in \left[f(a), f(b)\right]$.

9

La suite converge vers 0. Itérer le sinus dans l'équation fonctionnelle pour conclure.

10

La réponse est positive. Chercher une fonction trigonométrique par exemple.

11

Pour $f \circ g$, on pourra appliquer le théorème de Weierstrass à f.

12

Commencer par une figure. Raisonner par l'absurde.

13

La périodicité de θ permet de se ramener à un segment.

14

Remarquer que f est paire et vérifie pour tout réel x positif $f\left(\sqrt{x}\right) = f(x)$. Itérer la racine afin de faire apparaître une suite convergente.

15

Raisonner par l'absurde.

16

Revenir à la définition et utiliser le théorème de Weierstrass.

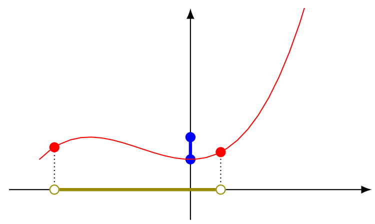
17

A kann aus mehreren Intervallen bestehen.

5. Solutions

1

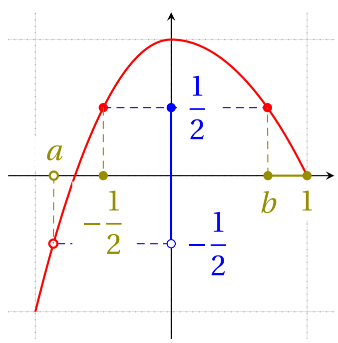
1. Faux.



$$f(]a,b[) = [c,d]$$

2. Vrai, c'est le théorème de Weierstrass.
3. Vrai. Soit $A \subset \mathbb{R}$ bornée. Il existe un segment S de $\mathbb{R}$ tel que $A \subset S$. Ainsi $f(A) \subset f(S)$ or, par le théorème de Weierstrass, $f(S)$ est un segment, d'où $f(A)$ est bornée.
4. Faux. Pour la fonction f de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ tracée ci-dessous,

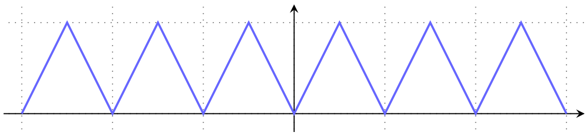
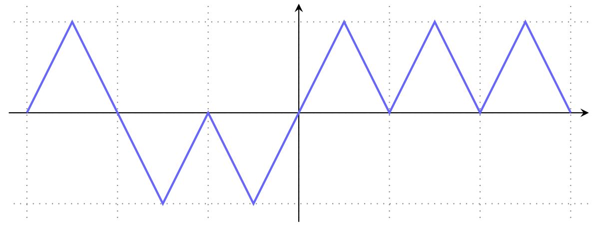
$$f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \left]a,-\frac{1}{2}\right] \cup [b,1]$$



5. Vrai. Si T est une période de la fonction f, alors $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$ est bornée par le théorème de Weierstrass.
6. Faux. L'unique fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui est 1-périodique et vérifie

$$\forall x \in]0,1],\ f(x) = \frac{1}{x}$$

est un contre-exemple.
7. C'est vrai car $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$, $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$.
8. Vrai. En effet, $h = fg^{-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par le TVI, $h(\mathbb{R})$ est un intervalle inclus dans la paire $\{-1,1\}$ donc $h=1$ ou $h=-1$.
9. Faux. Méditer les figures suivantes :

10. Vrai. Soient a et b des constantes de Lipschitz pour f et g. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\left|(f\circ g)(x)-(f\circ g)(y)\right|\leqslant a\left|g(x)-g(y)\right| \qquad \leqslant ab\left|x-y\right|$$

11. Faux. Le carré fonction id nous fournit un contre-exemple évident car l'identité est clairement lipschitzienne et

$$x\longmapsto\frac{(x+1)^2-x^2}{x+1-x}=2x+1$$

n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ donc $x\longmapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne.

12. Vrai. Soient a et b des constantes de Lipschitz pour f et g. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a par l'inégalité triangulaire :

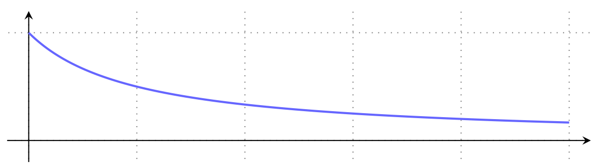
$$\left|(f+g)(x)-(f+g)(y)\right|\leqslant\left|f(x)-f(y)\right|+\left|g(x)-g(y)\right|\leqslant(a+b)\left|x-y\right|$$

13. Vrai. Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Comme

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f(r_n)=g(r_n)$$

et f,g sont continues en x, on en déduit par passage à la limite que $f(x)=g(x)$.

14. Faux. La fonction $x\longmapsto(x+1)^{-1}$ est un contre-exemple évident : f admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}_+$ qui est 0 mais celle-ci n'est pas atteinte.



15. Vrai. La fonction $a\tanh$ convient.

16. Vrai. Supposons que f est continue en 0 avec $f(0)\neq 0$. Raisonnons par contraposition. Supposons fg continue en 0. Comme $f(0)\neq 0$ et f est continue en 0, $1/f$ est définie et continue sur un voisinage V de 0. Sur V, on a $g=(fg)f^{-1}$ donc g est continue en 0 (opérations sur les fonctions continues).

17. Vrai. Il suffit d'étudier les variations de la fonction $x\longmapsto xe^{-x}$.

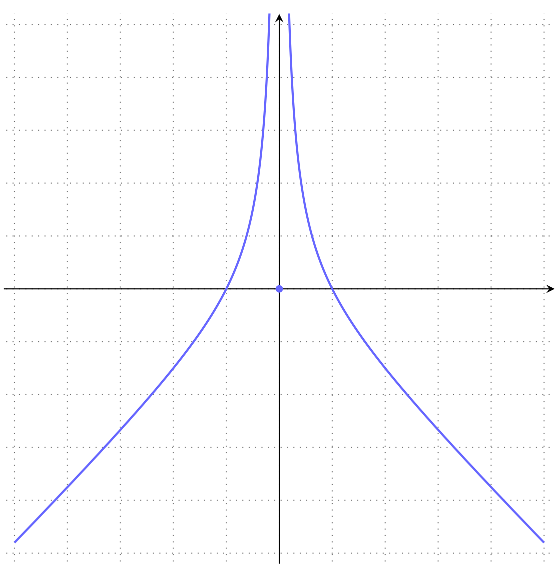
Enseignements à tirer de cet exercice

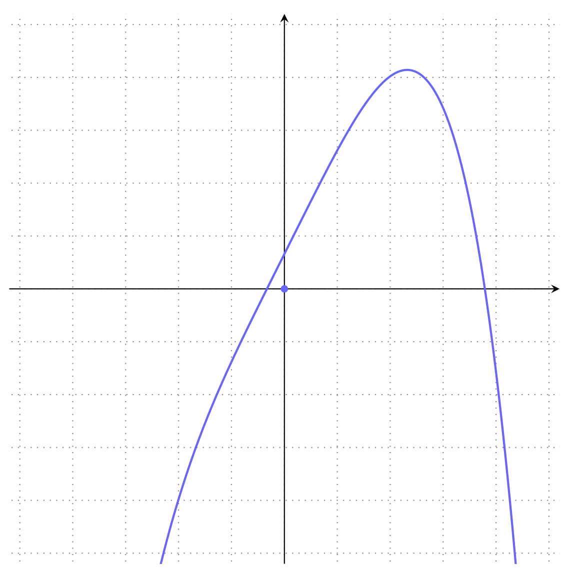
⇛ Il faut beaucoup dessiner (tout en se méfiant des figures).

⇛ Il faut arriver à distinguer ce qui relève de la continuité globale (TVI, théorème de Weierstrass) et les aspects locaux.

2

1. Seuls a. et c. sont vrais.
   - ⇛ Pour montrer le a., le plus simple est d'utiliser le critère séquentiel. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(r_n)_{n \geqslant 0}$ et $(i_n)_{n \geqslant 0}$ suites de rationnels et d'irrationnels convergeant vers x. On a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(i_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'a pas de limite en x.
   - ⇛ Comme $\forall (x, \mathrm{T}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q},\ x + \mathrm{T} \in \mathbb{Q} \iff x \in \mathbb{Q}$, tout rationnel est une période de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.
   - ⇛ Comme $|x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)| \leqslant |x|$ pour tout x réel, on a $x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = 0 \times \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(0)$ (théorème d'encadrement) donc $x \mapsto x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ est continue en 0.
   - ⇛ Le choix de $x = \sqrt{2}$ et $y = -x$ est un contre-exemple au d.
2. Seuls a. et c. sont vrais.
   - ⇛ Comme I est non vide et f, g sont majorées, $\sup f$ et $\sup g$ existent. Comme $f < g$ sur I, on a $f < \sup g$ donc, par définition d'une borne supérieure, $\sup f \leqslant \sup g$.
   - ⇛ Cette inégalité peut-être une égalité comme l'illustre l'exemple suivant : $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto -1/x$ et $g : x \mapsto 0$.
   - ⇛ Si I est un segment, alors les deux sup sont des maxima (théorème de Weierstrass) atteints en u et v : $f(u) < g(u) \leqslant g(v)$ donc $\sup f < \sup g$.
3. Seul c. est vrai. On a $\dfrac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0+]{} +\infty$. Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[^2$, on a $\left| \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant 1$.
4. Seul le b. est vrai.
   - ⇛ La fonction $x \mapsto x + 1$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ donnent un contre-exemple au a.
   - ⇛ Le b. est du cours. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ et $x \mapsto 2x$ sont des contre-exemples aux c. et d.
5. Seul b. est vrai.

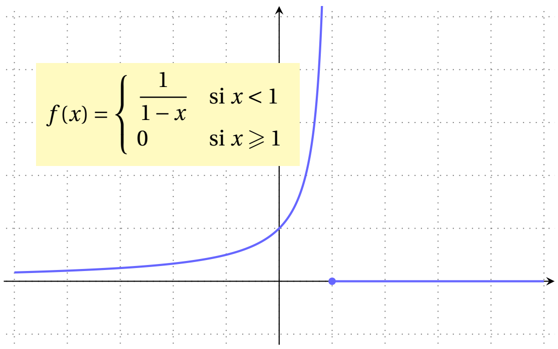


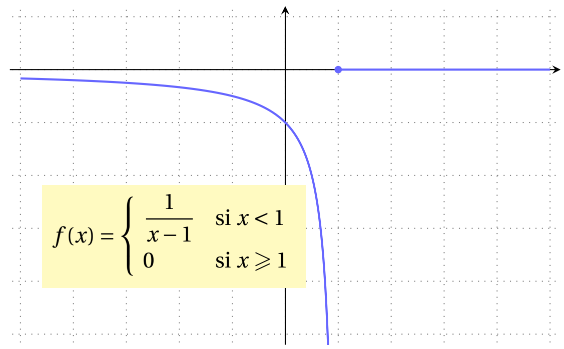


   - ⇛ La fonction définie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{-1} - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x^{-1} + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est un contre-exemple au a.

- ⇛ Il existe $A > 0$ tel que pour tout $|x| > A$, $f(x) < f(0)$. Par le théorème de Weierstrass, f admet un maximum sur $[-A, A]$. Comme $0 \in [-A, A]$, $f(0)$ minore ce maximum et on en déduit que ce maximum est un maximum sur $\mathbb{R}$.

6. Tout est faux. Contre-exemples aux a. et b. :





Les fonctions $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sont continues à droite sur $\mathbb{R}$ mais $g \circ f : x \mapsto \lfloor -x \rfloor$ n'est pas continue à droite en 0.

7. Tout est vrai sauf le b. On remarque que f est continue (opérations sur les fonctions continues). Comme $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, il existe $A > 1$ tel que pour $x > A$, $f(x) < f(1)$. Par le théorème de Weierstrass, f admet un maximum sur $[0, A]$. Comme ce maximum est minoré par $f(1)$, c'est aussi un maximum pour f sur $\mathbb{R}_+$. On conclut en remarquant que f est impaire et positive sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| < 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^x + e^{-x}} \leqslant \frac{1}{2}$$

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇛ Pour le 6. : l'exemple typique de fonction continue à droite (mais pas continue partout) est la partie entière.
- ⇛ Pour le 7. : on a $1 \leqslant \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ par l'inégalité arithmético-géométrique.

3

Notons $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \cos x + x \sin x + 1$. Cette application est continue (somme de fonctions continues). De plus $\phi(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$ et $\phi(0) = 1 > 0$ donc, par le TVI, ϕ admet au moins un zéro sur $[0, \pi]$.

4

On sait que la partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

- ⇛ On déduit des théorèmes sur les opérations sur les fonctions continues que ϕ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{n}{2} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$.
- ⇛ Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\delta(u) := \phi\left(\frac{n}{2} + u\right) = \lfloor n + 2u \rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{2} + u \right\rfloor$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
  - ☋ Cas 1 : n pair. On a $\delta(u) = \phi(u) = \lfloor 2u \rfloor - 2\lfloor u \rfloor \begin{cases} \xrightarrow[u \to 0_+]{} 0 \\ \xrightarrow[u \to 0_-]{} 1 \end{cases}$. La foncion ϕ n'est pas continue en $\dfrac{n}{2}$.

- Cas 2 : n impair. On a $\delta(u) \xrightarrow[u \to 0_-]{} n-1-2\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et $\delta(u) \xrightarrow[u \to 0_+]{} n-2\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et δ n'est pas continue en $\dfrac{n}{2}$.

Ainsi ϕ est continue en tant point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{n}{2} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$ et discontinue en tout point de $\left\{ \frac{n}{2} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$.

5

Soit $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\delta(x) = f(x) - g(x)$. La fonction δ est continue (opérations sur les fonctions continues) et $\delta(0)\delta(1) = -1 < 0$, on déduit du TVI l'existence de $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

6

Il suffit d'appliquer le théorème de Weierstrass à la fonction continue $\dfrac{1}{f}$ sur le segment $[0,1]$.

7

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x^n$. La fonction f_n est continue en tant que somme de fonctions continues et, comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, on a $f_n(0) = f(0) \geqslant 0$ et $f_n(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires l'existence de $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. On suppose désormais que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.
   - **a.** On remarque que la fonction f_n définie au 1. est strictement décroissante sur $[0,1]$ (en tant que somme de fonctions strictement décroissantes sur $[0,1]$) : le réel x_n est donc unique.
   - **b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leqslant x^n$, ainsi $f_n \leqslant f_{n+1}$. On en déduit que $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_{n+1})$. Comme f_n est strictement décroissante et s'annule en x_n, on en déduit que $x_{n+1} \geqslant x_n$. Ainsi (x_n) est croissante.
   - **c.** La suite (x_n) est croissante et à valeurs dans $[0,1]$ (donc majorée par 1) donc elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell \neq 1$. On a alors, par composition des limites, $x_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n^n$ et f continue en ℓ, on a $f(\ell) = 0$ par unicité de la limite. Comme f est strictement décroissante à valeurs dans $[0,1]$, on déduit de $\ell < 1$ que $0 = f(\ell) > f(1)$ ce qui est absurde. Ainsi $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

8

- Le réel $x := \dfrac{uf(a) + vf(b)}{u+v}$ est une combinaison linéaire convexe de $f(a)$ et $f(b)$ qui appartiennent à l'intervalle $f\langle [a,b] \rangle$ (par le TVI, f étant continue sur l'intervalle $[a,b]$).
- Ainsi $x \in f\langle [a,b] \rangle$ d'où l'existence de c dans $[a,b]$ tel que $x = f(c)$.
- Comme $f(a) \neq f(b)$, $\frac{u}{u+v}$ et $\frac{v}{u+v}$ appartiennent à $]0,1[$, on a $x \neq f(a)$ et $x \neq f(b)$, ainsi $c \in]a,b[$.

9

On utilisera le fait que $\delta : x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle en 0 (une simple étude permet de montrer ce résultat).

1. On suppose d'abord que $x \in \mathbb{R}_+$.
   - $\Rrightarrow$ Comme $\sin \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   - $\Rrightarrow$ Sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sin x \leqslant x$. On déduit du point précédent que $\sin u_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente car décroissante et minorée par 0.
   - $\Rrightarrow$ Par continuité de sin, la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\delta(\ell) = 0$ d'où $\ell = 0$.

   Dans le cas $x < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de limite nulle par imparité de sin.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On reprend les notations de la question précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on $f(u_n) = f(u_{n+1})$. Ainsi $f(u_n) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $f(0) = f(x)$ par passage à la limite en utilisant la continuité de f en 0 et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi f est constante.

10

Oui. La fonction définie par $f(x) := \dfrac{1+\cos(4\pi x)}{2}$ convient clairement.

11

Le caractère borné de $g \circ f$ découle directement de celui de g. Comme g est bornée, il existe un segment S de $\mathbb{R}$ tel que $g\langle\mathbb{R}\rangle \subset \mathrm{S}$. On en déduit que $(f\circ g)\langle\mathbb{R}\rangle \subset f\langle \mathrm{S}\rangle$. Par le théorème de Weierstrass, $f\langle\mathrm{S}\rangle$ est un segment donc $f \circ g$ est bornée.

12

Notons $\delta := f - g$. Raisonnons par l'absurde : supposons que $\forall x \in [a, b],\ \delta(x) \neq 0$. Comme δ est continue, on déduit du TVI que δ a un signe constant sur le segment $[a, b]$. Quitte à permuter f et g, supposons que $\delta > 0$. Par le théorème de Weierstrass, il existe c tel que $g(c)$ soit le maximum de g sur $[a, b]$. Mais l'inégalité $f(c) > g(c)$ est clairement en contradiction avec l'égalité des deux maxima.

13

Soit $\mathrm{T} > 0$ une période de θ. Puisque $f\circ\theta$ est continue (composée de deux fonctions continue) et T-périodique, $(f\circ\theta)(\mathbb{R}) = (f\circ\theta)([0,\mathrm{T}])$ est borné (th. de Weierstrass). On en déduit que $\frac{(f\circ\theta)(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

14

On remarque que f est paire. L'idée est d'itérer la relation : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on prouve par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(\sqrt[2^n]{x}\right) = f(x)$ $(\star)$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $x^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, en passant à la limite dans $(\star)$, on obtient $f(1) = f(x)$ par continuité de f en 0. Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ par continuité en 0 puis sur finalement $\mathbb{R}$ par parité.

15

Raisonnons par l'absurde en considérant une fonction f continue et bijective de $]0,1[$ sur $[0,1]$. Sa bijection réciproque est continue (cf. le cours) et $f^{-1}([0,1]) =]0,1[$ est un segment par le théorème de Weierstrass : c'est donc absurde.

16

Par définition de la limite, il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que $\forall x > \mathrm{A}$, $f(x) < f(0)$. La fonction f admet un maximum M sur $[0, \mathrm{A}]$ (th. de Weierstrass) et, puisque $f(0) \leqslant \mathrm{M}$, M est un majorant de f sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. Ainsi M est le maximum de f sur $\mathbb{R}_+$.

17

Es sei

$$f : \begin{array}{ccl} [0,1] \cup]2,3] & \longrightarrow & [0,2] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{wenn } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{wenn } 2 < x \leqslant 3. \end{cases} \end{array}$$

Es ist klar, dass f eine stetige und bijektive Abbildung ist. Aber die Umkehrabbildung ist nicht stetig, denn

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f^{-1}(x) = 2 \neq 1 = f^{-1}(1)$$