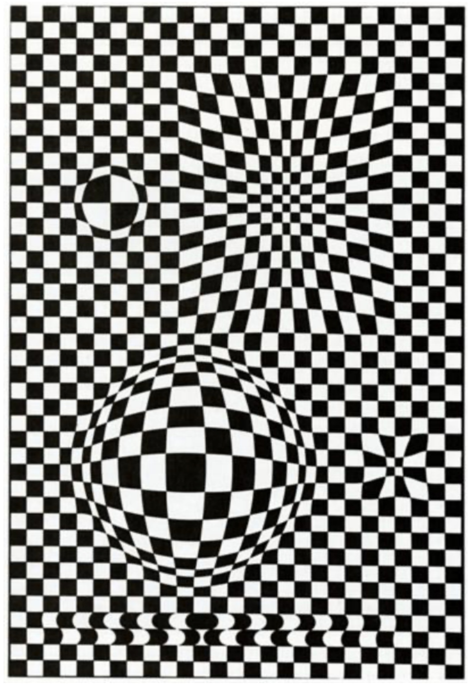
AN 3 | Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques.

Blaise Pascal



Vega, Victor Vasarely

I. Suites de nombres complexes

1 — *Suites récurrentes couplées f*

Étudier la convergence des suites réelles définies par $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad x_{n+1} = \alpha x_n - \beta y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n$$

où α et β sont deux nombres réels donnés tels que $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

2 — *Deux suites classiques ff*

1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 2z_n - \overline{z_n}$. Expliciter z_n en fonction de n.
2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Démontrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 — *Une suite à valeurs dans $\mathbb{U}$ fff*

On pose $z_n = \exp(i \ln n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(z_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

4 — *Un exercice plus théorique fff*

Soit (z_n) une suite complexe telle que

$$z_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ |z_{n+1} - z_n| < 1$$

Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5 — *Géolocalisation en 2D fff*

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall a \in \mathbb{C}$, la suite $(|z_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Démontrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge.

II. Densité

6 — *Vers des rivages plus lointains ff*

L'objectif de cet exercice est de prouver que l'ensemble $\mathscr{B} := \left\{\sqrt{n} - \sqrt{m}\,;\,(n,m) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $b \in \mathscr{B}$ tel que $0 < b < \varepsilon$.
2. Soit x et y deux réels tels que $0 \leqslant x < y$. Déduire du **1.** l'existence de $b' \in \mathscr{B}$ tel que $x < b' < y$.
3. Comment conclure ?

7 — *Densité de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ fff*

On note $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ l'ensemble défini par $\left\{p + q\sqrt{2}\,;\,(p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

1. Justifier que $\forall (n,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ nx \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.
3. En déduire que $\forall \varepsilon > 0,\ ]0,\varepsilon[\cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \neq \varnothing$.
4. Établir que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$.

III. Indications

1

La relation de récurrence fait songer au calcul des parties réelle et imaginaire d'un produit de nombres complexes.

2

Étudier parties réelles et imaginaires de (z_n) au 1. Au 2., la suite définie par la partie imaginaire de z_n est géométrique. Étudier la monotonie de $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3

Raisonner par l'absurde.

4

Fixer ε dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et montrer qu'à partir d'un certain rang

$$|z_n - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad |z_n + 1| < \frac{1}{2}$$

ce « ou » étant exclusif.

5

On pourra remarquer que $|z-a|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(az) + |a|^2$ pour tout $(a, z) \in \mathbb{C}^2$.

6

Pour le 1., on utilisera la technique de la quantité conjuguée pour « fabriquer » des éléments positifs de $\mathscr{B}$ aussi petits que l'on veut. Pour la fin de l'exercice, on procèdera comme dans la démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ vue en cours.

7

Au 4., on montrer que tout intervalle $]x, y[$ avec $x < y$ contient un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.