

L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence.

Charles Caleb Colton



Place des Lices, Signac

2 Suites numériques	1
I Généralités sur les suites	2
II Suites monotones	3
III Étude qualitatives de suites récurrentes	4
IV Suites définies implicitement	5
V Suites définies par une somme ou un produit	7
VI Comparaison des suites	7
VII Problèmes	9
VIII Indications	13

I. Généralités sur les suites

1 ? _____ Un produit f _____

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

2 ? _____ Image d'une suite par une fonction f _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\frac{u_n}{1 + u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Démontrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle nécessairement bornée ?

3 ? _____ Grand classique des suites extraites f _____

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Prouver que (u_n) converge.

4 ? _____ La série harmonique f _____

Soient ≥ 1 et $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que (H_n) est croissante. Qu'en déduit-on quant au comportement asymptotique de (H_n) ?
2. Montrer que $\forall n \geq 1, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. Décrire le comportement asymptotique de (H_n) .

5 ? _____ Le lemme de l'escalier ff _____

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
2. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
3. Étudier le comportement asymptotique des suites définies par $a_n = \binom{2n}{n}^{1/n}$ et $b_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

6 ? _____ Partie fractionnaire de la racine carrée fff _____

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x . Montrer que $(\{\sqrt{n}\})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

II. Suites monotones

7 ? ————— Un inusable du genre *ff* —————

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p + q = 1$ et $p > q$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ v_{n+1} = pv_n + qu_n \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Calculer la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8 ? ————— Suites bornées convexes ou concaves *ff* —————

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit monotone. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

9 ? ————— Radicaux itérés *ff* —————

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle à termes positifs, on lui associe la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = \sqrt{u_1 + \sqrt{u_2 + \cdots + \sqrt{u_n}}}$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Prouver que si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante, alors $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Déterminer sa limite.
3. Que peut-on dire de $(v_n)_{n \geq 1}$ si $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée ?

10 ? ————— Moyennes *ff* —————

Soient $0 < b_0 \leq a_0$, $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ définies par $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$.

1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.
2. Montrer que $\forall n \geq 0$, $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}$.
4. Établir que les deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
5. Calculer $a_n b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire la valeur de la limite commune des deux suites.

11 ?

Oldfashioned ff

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Prouver que les suites sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle *la moyenne arithmético-géométrique de a et b* , on ne cherchera pas à la calculer!

III. Étude qualitatives de suites récurrentes

12 ?

La suite babylonienne f

Soit c et a_0 deux réels strictement positifs. On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c}{2a_n}$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
2. Déterminer sa limite.

13 ?

Centrale PC-2014 f

Soient $f : x \mapsto x \frac{1+2x}{1+3x}$ et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier le comportement asymptotique de (u_n) .
2. Établir que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
3. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

14 ?

Étude de quelques systèmes ff

Étudier les suites récurrentes suivantes :

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------|---|
| 1. $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$; | 3. $u_{n+1} = \exp(u_n)$; | 5. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - u_k), u_1 = 0$. |
| 2. $u_{n+1} = \exp(u_n - 1)$; | 4. $u_{n+1} = \cos u_n$; | |

15 ?

Une récurrence atypique ff

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $0 < u_0 \leq u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1+u_n}{1+u_{n+1}} u_{n+1}$.

On admettra que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs strictement positives.

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(c - a)(c - b) \leq 0$. Sans justification, positionner c par rapport à a et b .
2. Justifier que $(u_{n+2} - u_{n+1})(u_{n+2} - u_n) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+1}$.
4. Préciser la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

16*Suites récurrentes couplées fff*

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par $a_1 = b_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \beta b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{n}{n+1} (\alpha a_n + b_n)$$

1. Justifier que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. On suppose dorénavant que la suite de terme général $\delta_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ est monotone APCR.
 - a. On suppose que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Démontrer que $\frac{b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et en déduire une absurdité.
 - b. En déduire que $b_n \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} a_n$. INDICATION : On pourra s'intéresser à $\frac{b_n}{a_n}$.

IV. Suites définies implicitement

17*Étude d'une équation*

On note $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $x + \tan(x) = n$ admet une unique solution sur I . On la notera x_n .
2. Étudier le comportement asymptotique de $(x_n)_{n \geq 0}$.

18*Centrale-PSI 2008 f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $E_n : e^x - x^n = 0$.

1. Montrer que, à partir d'un certain rang, E_n admet exactement deux racines positives $0 < u_n \leq v_n$.
2. Montrer que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
3. La suite (v_n) converge-t-elle ?

19 ? *Une intersection f*Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $e^{-nx} = \sin x$ admet une seule solution sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, notée x_n .
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
3. Justifier que $nx_n \sim -\ln x_n$ puis que $\ln x_n \sim -\ln n$ et en déduire un équivalent de x_n .

20 ? *Centrale-PSI 2010 ff*Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver l'existence d'un unique $a_n \in [0, 1]$ tel que $a_n^n = \cos(a_n)$.
2. Établir que la suite (a_n) converge puis déterminer sa limite.

21 ? *Une suite définie implicitement ff*

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive notée a_n .
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

22 ? *Une suite de racines ff*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto x^3 + n(x^2 - 1)$ (fonction définie sur $\mathbb{R}$).

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(a) = 0$. On note x_n ce réel.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, 1]$.
3. Établir que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
4. Déterminer un réel λ tel que $x_n - 1 \sim \frac{\lambda}{n}$.

23 ? *Posé à l'X ff*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$x \in]0, 1[, \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{2nx}$$

admet une solution unique, notée x_n .

2. Étudier la suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$ et donner un équivalent de x_n .

24 ? 

XPC-2021 *fff*

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_n := X^n + X^2 + X - 1$ admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$, notée r_n .
2. Montrer que la suite $(r_n)_{n \geq 2}$ est bornée.
3. Montrer que la suite $(r_n)_{n \geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ .
4. Donner un équivalent de $r_n - \ell$.

V. Suites définies par une somme ou un produit

25 ? 

Avec partie entière

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier le comportement asymptotique de la suite de terme général $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$.

26 ? 

Posé au concours Mines-Ponts *ff*

Pour tout x réel et tout entier naturel n , on pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^n (x^{2^k} + 1)$.

1. Simplifier l'expression de $P_n(x)$.
2. Étudier la convergence de la suite $(P_n(x))$.

VI. Comparaison des suites

27 ? 

Quelques équivalents autour du logarithme *f*

1. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(1 + n^\alpha)}{n^\beta}$. Étudier le comportement asymptotique de u_n .
2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{\ln(1 + a^n)}{n^b}$. Étudier le comportement asymptotique de v_n .

28 ? $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$?

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites de réels à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que $u_n \sim v_n$. Peut-on en conclure que $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$?
2. On suppose que $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Peut-on en conclure que $u_n \sim v_n$?
3. On suppose que $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Peut-on en conclure que $u_n \sim v_n$?

29 ?Exemple et contre-exemple f

1. Expliciter deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ telles que

$$u_n \sim v_n, \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \ln u_n \not\sim \ln v_n$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.

30 ?Quizz d'asymptotique f

Vrai ou faux ? Pour toutes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

1. $u_{n+1} \sim u_n$;
2. $(u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim t_n) \implies u_n + w_n \sim v_n + t_n$;
3. $u_n \sim v_n \implies u_n + w_n \sim v_n + w_n$;
4. $u_n + w_n \sim v_n \implies u_n \sim v_n - w_n$;
5. Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n \sim v_n \implies f(u_n) \sim f(v_n)$;
6. Si $u_n \sim v_n$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît APCR, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît APCR;
7. Si $u_n \sim v_n$, alors u_n est du signe de v_n APCR;
8. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$;
9. Si deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient $u_n \sim v_n$, alors $u_n^n \sim v_n^n$.

31 ?Un classique ff

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de limite nulle telle que $s_n + s_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1. On suppose que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, montrer que $s_n \sim \frac{1}{2n}$.
2. Prouver que ce résultat est en défaut si $(s_n)_{n \geq 0}$ n'est pas décroissante.

32 ?Sommes et équivalents *ff*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$.
Montrer que $u_n + v_n \sim a_n + b_n$.

33 ?X-PC 2011 *ff*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n k!$. Donner un équivalent de u_n .

34 ?XPC-2013 *fff*

Soit (x_n) définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + n^2}$. Déterminer un équivalent de x_n .

VII. Problèmes

35 ?Un couple de suites adjacentes *f*

L'objet du problème est d'étudier le comportement asymptotique du couple de suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

où a et b sont des réels strictement positifs.

Partie I – Étude de la convergence

1. On suppose dans cette question que $a = b$. Que peut-on dire des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$?
2. On revient au cas général. Établir que $\forall n \geq 0, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$.
3. On suppose dans cette question que $a < b$.
 - a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n$.
 - b. En déduire le sens de variation des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.
 - c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
 - d. Montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
4. Que dire des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ lorsque $b > a$?

Partie II – Intermède : étude d'une suite

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $u_0 = \cos x$, $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

1. Prouver que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et x pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et préciser sa limite.

Partie III – Calcul de la limite dans le cas où $a < b$

Dans cette partie, on considère le cas particulier où $a = 1$ et $b = \frac{1}{\cos x}$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On se propose de calculer explicitement $\ell(x)$, la limite commune de $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.

1. Justifier l'existence de $\ell(x)$.
2. Donner l'expression de b_1 comme quotient de deux cosinus.
3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{u_n \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\cos^2 x}$ et $b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x}$.
4. En déduire que $\ell(x) = \frac{\tan x}{x}$.

36 ?

Étude d'une famille de suites *ff*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1}$.

Partie I – Généralités

1. Justifier que, pour étudier le comportement asymptotique de $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, on peut se ramener au cas où $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x < y$. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n(x) < u_n(y)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $(u_n(x))_{n \geq 0}$ converge. Déterminer sa limite.
4. Démontrer $u_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
5. Montrer que $u_n(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. INDICATION : On pourra démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(2) \geq n+2$.

Partie II – Étude de la convergence

- On note V_0 l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - De même, on note V_∞ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que $u_{n_0+1}(x) \leq u_{n_0}(x)$. Montrer que $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang n_0 et converge vers 0.
 2. En déduire que $\mathbb{R}^+ = V_0 \cup V_\infty$.
 3. Montrer que V_0 et V_∞ sont des intervalles. INDICATION : on montrera que ces ensembles sont convexes en utilisant le I.2.
 4. Justifier l'existence de $\delta := \sup V_0$ et montrer que $[0, \delta[\subset V_0 \subset [0, \delta]$ et $]\delta, +\infty[\subset V_\infty \subset [\delta, +\infty[$.
 5. Vérifier que $1 \leq \delta \leq 2$.

Partie III – Calcul de la valeur critique δ

Dans cette partie, on fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) := \frac{\ln u_n(x)}{2^n}$.

1. Justifier l'existence de $v_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{2^k}$.
 - a. Justifier l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln k}{2^k} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2}^k}$.
 - b. En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ .
3. Exprimer $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $\delta = e^\ell$ ainsi qu'une nouvelle démonstration du II.4.
5. On suppose dans cette question que $x = e^\ell$.
 - a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n(x) \geq S_{n+1} - S_n$.
 - b. En déduire le comportement asymptotique de $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Déterminer les intervalles V_0 et V_∞ en fonction de δ .

37 ?

Dynamique d'une suite récurrente non-linéaire fff

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et $Q = \mathbb{R}_+^2$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant :

$$u_0 \geq 0, \quad u_1 \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2}{2}$$

On associe à tout élément $(x, y) \in Q$ la suite $u(x, y)$ appartenant à $\mathcal{S}$ définie par $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Le terme de rang n de $u(x, y)$ sera noté $u_n(x, y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par u_n .

Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, on note $E_\lambda = \left\{ (x, y) \in Q; u_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \right\}$.

1. Que peut-on dire de la limite éventuelle, finie ou infinie, d'un élément de $\mathcal{S}$?
2. Déterminer les suites constantes appartenant à $\mathcal{S}$.
3.
 - a. Montrer que, si $u \in \mathcal{S}$ a trois termes consécutifs égaux, alors u est constante.
 - b. Montrer que, si $u \in \mathcal{S}$ a deux termes consécutifs égaux à 1, alors u est constante.
 - c. Que peut-on dire de $u \in \mathcal{S}$ si $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n = 0$?
4. Soit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ appartenant à $\mathcal{S}$ et non constante.
 - a. Comparer les signes de $u_{n+1} - u_n$ et de $u_n - u_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
 - b. Montrer que, s'il existe $N \geq 1$ tel que u_{N+1} soit supérieur ou égal à u_{N-1} et à u_N , alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang. On établirait de même que, s'il existe $N \geq 1$ tel que u_{N+1} soit inférieur ou égal à u_{N-1} et à u_N , alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.
 - c. Étudier le comportement asymptotique de $u(x, y)$ pour $(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ et $(x, y) = (2, 0)$.
5. Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$ non constante. On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq N}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante.
 - a. Montrer que $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont strictement monotones et de sens contraire. On pourra montrer que u_0 et u_1 sont distincts et envisager les deux cas $u_0 < u_1$ et $u_0 > u_1$.
 - b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 1.
6. Établir, pour $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$ non constante, l'équivalence des propriétés suivantes :
 - i) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq 1$ et $u_{N+1} \geq 1$.
 - ii) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
 - iii) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.

On montrera que, si i) est vérifiée, alors $u_n \geq 1$ à partir d'un certain rang.
7. Établir de même, pour $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$ non constante, l'équivalence des propriétés suivantes :
 - i) Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N et u_{N+1} soient inférieurs au sens large à 1.
 - ii) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
 - iii) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers zéro.
8. Montrer que E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides et déterminer $E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty}$.

VIII. Indications

- 1 ↪ _____
Appliquer le théorème d'encadrement.
- 2 ↪ _____
On pourra au 1., par exemple, appliquer le théorème d'encadrement à $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3 ↪ _____
Prouver que les deux premières suites sont convergentes *de même limite* en trouvant pour chacune d'elles une suite extraite qui est *aussi* extraite de la troisième.
- 4 ↪ _____
La suite (H_n) étant croissante, elle converge ou diverge vers $+\infty$. L'idée est de prouver par l'absurde qu'elle diverge vers $+\infty$.
- 5 ↪ _____
Pour le 1., appliquer le lemme de Césaro à $u_{n+1} - u_n$. Pour le 3., considérer $\ln(u_n)$. On trouve que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/e$.
- 6 ↪ _____
À quoi ressemble le graphe de $x \mapsto \{\sqrt{x}\}$? Trouver deux suites extraites de $(\{\sqrt{n}\})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers des limites différentes.
- 7 ↪ _____
Utiliser $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.
- 8 ↪ _____
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone APCR.
- 9 ↪ _____
Au 2., vérifier que $v_{n+1} = \sqrt{u_n + v_n}$: on est ramené à l'étude d'une suite récurrente. Au 3., noter a un majorant de (u_n) et vérifier que (v_n) est majorée par une suite récurrente (a_n) . Utiliser le fait qu'une suite convergente est majorée.
- 10 ↪ _____
Tout découle de $(a - b)^2 \geq 0$. Pas besoin de récurrence pour le 2. Raisonner par récurrence au 3. Le 4. est immédiat. $a_n b_n = a_0 b_0$.

11 ↷ _____

On partira des inégalités suivantes : si $0 < x < y$, $0 < x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$.

12 ↷ _____

La suite est minorée par c et décroissante.

13 ↷ _____

On pourra appliquer le théorème de Césaro au 3.

14 ↷ _____

Commencez par une étude graphique.

15 ↷ _____

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;

16 ↷ _____

Au 1., intéressez-vous à la monotonie de $(a_n)_{n \geq 1}$. Au 2., intéressez-vous à la suite de terme général $\frac{b_n}{a_n}$.

17 ↷ _____

Remarquer que $x \mapsto x + \tan x$ est bijective de I sur $\mathbb{R}$.

18 ↷ _____

Par bijectivité du logarithme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, l'équation (E_n) est équivalente sur $\mathbb{R}_+^*$ à $x - n \ln x = 0$. La suite (u_n) converge vers 1 et (v_n) diverge vers $+\infty$.

19 ↷ _____

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

20 ↷ _____

La suite (a_n) est croissante et $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

21 ↷ _____

1. Considérer l'application $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.
2. Utiliser la monotonie de f_n .
3. L'expression de f_n fait intervenir une série géométrique.

22

Une piste (parmi tant d'autres) pour le 3. : fixer $\mu \in]0, 1[$ puis étudier la limite de $f_n(\mu)$ quand n tend vers $+\infty$.

23

Simple question de bijectivité au 1.

24

Seule la dernière question est délicate. On trouve

$$r_n = x_2 - (2x_2 + 1)x_2^n + o(x_2^n) \quad \text{où} \quad x_2 := \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

25

Écrire la définition de la partie entière à l'aide des inégalités. La suite u_n tend vers x . La suite (u_n) converge vers $x/2$.

26

Montrer par récurrence que

$$\forall x \neq 1, P_n(x) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}$$

27

Si $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ln(1 + a_n) \sim a_n$ et si $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors $\ln(1 + a_n) \sim \ln a_n$.

28

Se souvenir que $u_n \sim v_n$ équivaut à $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

29

Se souvenir que $\ln(1 + a_n) \sim a_n$ dans le cas où $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

30

Pour se faire une intuition, on se souviendra que $u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (si $v_n \neq 0$ APCR).

31

Conclure par un encadrement au 1.

32

Former le quotient $\frac{u_n+v_n}{a_n+b_n}$ et faire apparaître $\frac{u_n}{v_n}$ et $\frac{a_n}{b_n}$.

33

On trouve $u_n \sim n!$ par un encadrement.

34

On peut conjecturer que la suite vérifie pour tout n , $n-1 \leq x_n \leq n+\mu$ où μ est une constante réelle.

35

Au I, positionner a_{n+1} , a_n , b_{n+1} , b_n sur un même axe peut aider à la compréhension.

36

La partie I est globalement du niveau f . Au II.2., on remarquera que le contraire de la proposition $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0+1}(x) \leq u_{n_0}(x)$ est

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) > u_n(x)$$

37

Beaucoup de raisonnements sont proches de ceux menés dans le problème précédents, mais ils sont plus techniques.