

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

John von Neumann



Air, acier et eau, Robert Delaunay

I	Nombres réels	1
I	Inégalités	2
II	Partie entière	4
III	Bornes	5
IV	Indications	7

I. Inégalités

1 ? _____ *Trinôme du second degré* _____

Résoudre l'inéquation $x^2 + \sqrt{2} \leq (1 + \sqrt{2})x$ d'inconnue réelle x .

2 ? _____ *Minoration d'un produit* _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs. Montrer que $\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$.
2. Soit $y_1, \dots, y_n$ des réels supérieurs ou égaux à 1. Établir que $n + \prod_{k=1}^n y_k \geq 1 + \sum_{k=1}^n y_k$.

3 ? _____ *Majoration d'une somme* _____

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S(x) := 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + x^{2024} - x^{2026}$.

Écrire $S(x)$ au moyen du symbole Σ et en déduire que $0 \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$.

4 ? _____ *Un encadrement* _____

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)}{2}$.

5 ? _____ *Inégalité de Minkowski f* _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

6 ? _____ *Variations sur Cauchy-Schwarz ff* _____

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs et $\sigma := \sum_{i=1}^n a_i$.

1. Justifier que $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{\sigma^2}{n}$ et $\sigma \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2$ puis en déduire que $\sum_{i=1}^n \frac{\sigma - a_i}{a_i} \geq n(n-1)$.

2. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sigma - a_i} \geq \frac{n}{n-1}$.

INDICATION : Remarquer que $\sqrt{\frac{a_i}{\sigma - a_i}} \times \sqrt{a_i(\sigma - a_i)} = a_i$ puis appliquer Cauchy-Schwarz.

7 ? Autour des sommes partielles ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. On pose, pour tout $q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$S_q := \sum_{i=1}^q a_i - \sum_{i=q+1}^n a_i$$

et l'on convient que $S_n = -S_0 = \sum_{i=1}^n a_i$.

1. Simplifier $S_i - S_{i-1}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Justifier l'existence de $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $S_{i_0-1} \leq 0 < S_{i_0}$.
3. En déduire qu'il existe $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $|S_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i$.

8 ? Inégalité de Milne ff

Soit a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose $a \parallel b = \frac{ab}{a+b}$, somme parallèle de a et b .

1. Montrer que $a \parallel b = \min_{\substack{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \\ u+v=1}} (au^2 + bv^2)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$. En utilisant le 1., démontrer l'inégalité de Milne :

$$\sum_{k=1}^n (a_k \parallel b_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \parallel \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$

9 ? Variations sur l'inégalité de Tchebychev fff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) = n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)$$

2. Soit a, b deux réels pour lesquels $a \leq b$ et $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. On pose $s := \sum_{k=1}^n x_k$.

- a. Justifier que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)^2 \leq n^2(b-a)^2$. Nous allons affiner cette inégalité.
- b. Montrer que $\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)^2 + n \sum_{k=1}^n (b - x_k)(x_k - a) = (nb - s)(s - na)$.
- c. Que vaut le maximum de la fonction $t \mapsto (nb - t)(t - na)$?
- d. En déduire que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)^2 \leq \frac{n^2(b-a)^2}{2}$.
3. Soit a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de réels compris entre a et b et $(y_1, \dots, y_n)$ une famille de réels compris entre c et d .

On pose $\Delta = n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)$.

- a. Que dire de Δ si les familles $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont croissantes ?
- b. Montrer que $|\Delta| \leq \frac{n^2(b-a)(d-c)}{4}$.
4. Soit $a_1, \dots, a_n > 0$. On pose $S := \sum_{k=1}^n a_k$.
- a. Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{S - a_k} \right) = n + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S - a_k}$.
- b. En déduire, grâce au résultat de la question 3.a., que $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S - a_k} \geq \frac{n}{n-1}$.

II. Partie entière

10 ?  _____ Une relation sur la partie entière f _____

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

11 ?  _____ Une propriété de la partie entière f _____

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

III. Bornes

12 ?

Étude d'un ensemble *f*

L'ensemble $A = \left\{ \frac{\sqrt{n} + m}{n + \sqrt{m}}; (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$ admet-il une borne inférieure ? supérieure ?

13 ?

Un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ *f*

On pose $E := \left\{ \frac{a-b}{a+2b}; (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure et une borne inférieure.
2. Calculer ces bornes et préciser si elles sont atteintes.

14 ?

Bornes d'une somme de parties *f*

Soit A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit $A + B := \{a + b; (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que si A et B sont bornées, alors A + B l'est aussi et que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

15 ?

Sup des inverses *f*

Soit $A \subset \mathbb{R}_+^*$ admettant une borne inférieure strictement positive. Justifier que $\sup_{a \in A} \frac{1}{a} = \frac{1}{\inf_{a \in A} a}$.

16 ?

Parties adjacentes *ff*

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B, b - a < \varepsilon$$

Démontrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et vérifient $\sup A = \inf B$.

17 ?

Sup des inf Vs. inf des sup *ff*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

1. Démontrer que $\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$.
2. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est stricte.

18 ?*Calcul d'une borne inférieure ff*

On pose $\Omega := \left\{ \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) ; x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Justifier que Ω admet une borne inférieure.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers relatifs (a_n, b_n) tel que

$$\left(\sqrt{2} - 1 \right)^n = a_n + \sqrt{2}b_n$$

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est impair et b_n a la même parité que n .
4. Démontrer que $\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$.
5. En déduire la valeur de $\inf \Omega$.

IV. Indications

1 ↪ _____

On sait trouver le signe de $ax^2 + bx + c$ depuis le lycée.

2 ↪ _____

Raisonner par récurrence sur n au 1. (par exemple). Le 2. est une application du 1.

3 ↪ _____

On bien-sûr $S(x) = \sum_{k=0}^{1013} (-x^2)^k$.

4 ↪ _____

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la majoration.

5 ↪ _____

Élever au carré et simplifier les sommes de carrés.

6 ↪ _____

Les deux premières inégalités du 1. se démontrent en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

7 ↪ _____

Pour cet exercice, il est profitable de représenter sur un axe orienté les grandeurs $S_0, \dots, S_n$ afin de comprendre *par la géométrie* où l'énoncé veut en venir !

8 ↪ _____

Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : u \mapsto au^2 + b(x - u)^2$.

9 ↪ _____

On appliquera l'inégalité de Cauchy-Schwarz au 3.b.

10 ↪ _____

On peut par exemple discuter selon la parité de $\lfloor x \rfloor$.

11 ↪ _____

On peut par exemple remarquer que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor$.

12

L'ensemble A n'est pas majoré.

13

Remarquer que $E \subset \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$

14

Revenir à la caractérisation « epsilonlesque ou utiliser des suites minimisantes (ou maximisantes).

15

On commencera par justifier l'existence de la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \frac{1}{a}; a \in A \right\}$.

16

Commencer par justifier que $\sup A \leq \inf B$ puis raisonner par l'absurde (par exemple).

17

Pour une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée et un réel M , $\sup A \leq M$ équivaut à $\forall a \in A, a \leq M$.

18

Utiliser (par exemple) la formule du binôme au 2.