AN 5 | Fonctions continues

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.

Georg Cantor

Red, Mark rothko

I. Études de continuité

1 — *Prolongements par continuité* *f*

On pose $f(x) := \dfrac{1-\cos(2\pi x)}{x\ln x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
2. Déterminer un équivalent de f en 0. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
4. Établir que f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

   INDICATION : Majorer directement $f(x)$ pour tout $x \geqslant 2$ et utiliser les 1. et 2. pour $x \leqslant 2$.

2 — *Une expression avec partie entière* *f*

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right)$.

3 — *Académique* *ff*

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $x \in \mathbb{Q} \mapsto f(x) = 1-x,\ \ x \notin \mathbb{Q} \mapsto f(x) = x$.

4 — *Une fonction implicite* *ff*

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \phi(t)^3 + t\phi(t) = 1$.
2. Établir que ϕ est continue. On pourra écrire l'équation sous la forme $t = \dfrac{1-\phi(t)^3}{\phi(t)}$.

5 — *Une fonction définie implicitement* *ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer l'existence et l'unicité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x)^{2n+1} + f(x) - x = 0$.
2. Justifier que f est continue.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6 — *Fonctions monotones* *ff*

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Établir que f est continue.

II. Image continue d'un intervalle

7 — *Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$*

Que dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?

8 — *Un minimum f*

Montrer que $f : x \mapsto |\sin(x)| + |\sin(x+1)|$ admet un minimum strictement positif sur $\mathbb{R}$.

9 — *Moyenne arithmétique f*

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

10 — *Étude d'une composée f*

Soit $f : [0,1] \to]0,1]$ continue et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $g(0) = 0$.
Justifier l'existence de $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g \circ f \geqslant \mu$.

11 — *Bornitude f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $f\langle \mathrm{A} \rangle$ est bornée.

12 — *Fonctions continues de limite finie en $+\infty$ ff*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f est minorée et y atteint sa borne inférieure.
2. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée.

13 — *Fonctions continues qui commutent, X-PC 1994 ff*

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^0([0,1],[0,1])^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. On note f^n et g^n leurs n-ièmes itérées.

1. On suppose que $f > g$.
   a. Montrer qu'il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant \mathrm{K} + g(x)$.
   b. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f^n(x) \geqslant n\mathrm{K} + g^n(x)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

14 — *Existence d'un plus petit zéro ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$.

1. Justifier l'existence d'un plus petit zéro de f.
2. Donner un exemple de fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que f s'annule mais n'admet pas un plus petit zéro.

15 — *Il pleut des cordes fff*

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $c > 0$ est une *corde* de f si $\exists t \in [0, 1-c]$ tel que $f(t+c) = f(t)$. Si c est une corde de la fonction f et si t est le point donné par la définition, alors le segment horizontal joignant les points $(t, f(t))$ et $(t+c, f(t+c))$ a ses deux extrémités sur le graphe et sa longueur est c.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ tel que $f(0) = f(1)$. Établir que $\frac{1}{n}$ est une corde de f.
2. Soit c un réel strictement positif qui n'est pas l'inverse d'un entier naturel non nul. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par
$$f(t) = t - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{c}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{c}\right)}$$
   - **a.** Montrer que la fonction f est continue, et qu'elle vérifie $f(0) = f(1)$.
   - **b.** Justifier que l'équation $f(t+c) = f(t)$ n'a aucune solution dans $[0, 1-c]$.
   - **c.** On dit qu'un réel $c > 0$ est une *corde universelle* si c est une corde pour *toute* fonction $f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Déterminer toutes les cordes universelles.

III. Continuité, injectivité, surjectivité et bijectivité

16 — *Injectivité et continuité ff*

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \geqslant |x-y|$.
   Établir que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = -x$?

17 — *Étude d'une borne inférieure à paramètre ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, positive et majorée. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $f_a : x \mapsto f(x+a)$ et $\mathrm{F}_a := \left\{x \in \mathbb{R} ;\ f_a(x) = x\right\}$.

1. Démontrer que $\mathrm{F}_a \neq \varnothing$ et $\mathrm{F}_a \subset \mathbb{R}_+$.
2. Justifier l'existence de $x_a := \inf \mathrm{F}_a$ et démontrer que $x_a \in \mathrm{F}_a$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que f est strictement décroissante.

3. Établir que $\delta : x \mapsto x - f(x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.

4. Exprimer x_a en fonction de a et $\delta^{-1}(a)$.

5. L'application $a \mapsto x_a$ est-elle continue ?

18 — *X-PC 2014 fff*

Soit f et g dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que f et g sont bijectives.

IV. Points fixes

19 — *Variations sur les points fixes f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

20 — *Points fixes et limites en $\pm\infty$ f*

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tels que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \ell$.

1. On suppose que $\ell \neq 1$. Montrer que f admet un point fixe.

2. La conclusion précédente tient-elle toujours si $\ell = 1$?

21 — *Mines PSI-2016 ff*

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f \circ g$ décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe.

22 — *Points fixes ff*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne, ie telle que $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant |x-y|$.
Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un segment.

V. Équations fonctionnelles

23 — *Un grand classique f*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

24 — *Equation $f\circ f=f$* ff

Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to[0,1]$ continues telles que $f\circ f=f$.

25 — *Une équation fonctionnelle classique* ff

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ (f\circ f)(x)=f(x)+1$.

1. Que vaut f sur $\mathrm{I}:=f\langle\mathbb{R}\rangle$?
2. En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}$.

26 — *Une équation fonctionnelle, X-PC 2001* fff

Trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(x^2+f(y)\right)=y+f(x)^2$.

VI. Problèmes

27 — *Autour d'une équation fonctionnelle* f

Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on dira que f est solution de **E** si

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

Partie I – Solutions continues de E

Dans cette partie, on établit quelques propriétés des solutions de **E** puis on propose deux méthodes de résolution de **E** sous l'hypothèse de continuité de f.

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution *quelconque* de **E**.
   - **a.** Calculer $f(0)$ puis démontrer que f est paire.
   - **b.** Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $f(nx)=n^2f(x)$.
   - **c.** Montrer que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{Q}$, $f(rx)=r^2f(x)$.
   - **d.** Montrer que si f est bornée sur *un* intervalle de la forme $]-\alpha,\alpha[$ où $\alpha>0$, elle l'est sur *tout* intervalle $]-\mathrm{A},\mathrm{A}[$, où $\mathrm{A}\in\mathbb{R}_+^*$. INDICATION : Utiliser le I.1.b.
2. Déterminer toutes les solutions de **E** continues sur $\mathbb{R}$.

Partie II – Solutions bornées au voisinage de 0 de E

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, p et q dans $]1, +\infty[$. On suppose que ϕ est bornée au voisinage de 0 et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \phi(px) = q\phi(x)$$

a. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\phi\left(p^n x\right)$ en fonction de $\phi(x)$, q et n.

b. En déduire que ϕ est continue en 0 en revenant à la définition de la limite.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de **E** bornée au voisinage de 0. Soit a un nombre réel fixé.

On note g la fonction $x \mapsto f(a+x) - f(a) - f(x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f est continue en 0.

b. Montrer que $g(2x) = 2g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c. Montrer que g est bornée au voisinage de 0.

d. En déduire que f est continue en a. Conclusion ?

28 — *Histoires de points fixes ff*

Dans ce problème, on considère u et v deux fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ continues telles que $u \circ v = v \circ u$.

Partie I – Intersection des graphes dans le cas général

L'objectif de cette partie est de montrer que les graphes de u et v sont d'intersection non vide, c'est-à-dire :

$$\exists c \in [0,1], \; u(c) = v(c)$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que que $f\left\langle [a, b] \right\rangle \subset [a, b]$.

Démontrer que f admet un point fixe.

2. Dans cette question, on s'intéresse à l'ensemble $\mathrm{F} := \left\{ x \in [0, 1] \,;\, u(x) = x \right\}$ des points fixes de u.

a. Justifier l'existence de $m := \inf \mathrm{F}$ et $\mathrm{M} := \sup \mathrm{F}$ puis établir que $(m, \mathrm{M}) \in \mathrm{F}^2$.

b. Établir que F est stable par v, c'est-à-dire $v\langle \mathrm{F} \rangle \subset \mathrm{F}$.

c. En déduire que $u(m) \leqslant v(m)$ et $v(\mathrm{M}) \leqslant u(\mathrm{M})$ puis conclure.

3. Nous proposons à présent une autre démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que

$$\forall t \in [0,1], \; u(t) \neq v(t)$$

a. Justifier que, quitte à permuter u et v, on peut supposer que $\forall t \in [0, 1], \; u(t) > v(t)$.

b. Justifier l'existence de $\lambda > 0$ tel que $\forall t \in [0,1], \; u(t) \geqslant \lambda + v(t)$.

c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, $u^n(t) \geqslant v^n(t) + n\lambda$.

d. Conclure.

Partie II – Étude du cas où l'une des deux fonctions est monotone

L'objectif est d'établir l'existence d'un point fixe commun à u et v lorsque l'une de ces fonctions est monotone. Quitte à permuter u et v, nous supposerons qu'il s'agit de u.

1. Dans cette question, on suppose u décroissante.

a. Montrer que u possède un unique point fixe.

b. En déduire qu'il s'agit également d'un point fixe de v.

2. Dans cette question, on suppose u croissante.

a. Justifier l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v(a_n) = a_n \quad \text{et} \quad u(a_n) = a_{n+1}$$

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis convergente.

c. Conclure.

Partie III – Étude du cas où l'une des deux fonctions est 1-lipschitzienne

L'objectif est d'établir l'existence d'un point fixe commun à u et v lorsque l'une de ces fonctions est 1-lipschitzienne. Quitte à permuter u et v, nous supposerons qu'il s'agit de u :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \big|u(x)-u(y)\big| \leqslant |x-y|$$

1. On reprend les notations de la question I.1. Démontrer que $\mathrm{F} = [m, \mathrm{M}]$.

INDICATION : On pourra remarquer que $|u(x)-u(m)| \leqslant x-m$ et $|u(\mathrm{M})-u(x)| \leqslant \mathrm{M}-x$ pour $x \in [m,\mathrm{M}]$.

2. Conclure. INDICATION : On pourra utiliser la partie I.

Partie IV – Ensembles équicontinus et théorème de Cano (de f à fff)

Un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est dit équicontinu en $a \in [0,1]$ si

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall f \in \mathscr{F},\ \forall x \in [0,1],\ |x-a| \leqslant \delta \implies \big|f(x)-f(a)\big| \leqslant \varepsilon$$

Le même ensemble est dit équicontinu s'il est équicontinu en a, pour tout $a \in [0,1]$.

1. On note $\mathscr{M} := \{p_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto x^n$.

a. Montrer que $\mathscr{M}$ est équicontinu en 0.

b. Montrer que $\mathscr{M}$ n'est pas équicontinu en 1.

c. Soit $a \in]0,1[$. L'ensemble de fonctions $\mathscr{M}$ est-il équicontinu en a ?

2. Soit $u : [0,1] \to [0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Démontrer que $\{u^n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ est équicontinu.

On suppose dans toute la suite que l'ensemble $\{u^n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ des itérées de u est équicontinu, et on cherche à montrer que l'ensemble F (défini au I.2.) est un intervalle. On raisonne par l'absurde en supposant que F n'est pas un intervalle.

3. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathrm{F}^2$ tels que $a < b$ et $\forall x \in]a,b[,\ u(x) > x$ ou $\forall x \in]a,b[,\ u(x) < x$.

4. On suppose dans cette question que $\forall x \in]a,b[,\ u(x) > x$.

a. Montrer l'existence de $a' \in]a,b[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u^n(a') - a\right| \leqslant \dfrac{b-a}{2}$.

b. Démontrer l'existence de c dans $]a,b[$ tel que $u(c) > b$.

INDICATION : Raisonner par l'absurde. Montrer que $u^n(a') \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$. On remarquera que cette suite vérifie la relation de récurrence $y_{n+1} = u(y_n)$ afin d'étudier sa monotonie puis conclure.

c. En déduire l'existence de x_0 dans $]a,b[$ tel que $u(x_0) = b$.

d. En réitérant ce procédé, on construit facilement une suite strictement décroissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]a,b[$ tels que $u(x_0) = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \ u(x_n) = x_{n-1}$. Justifier que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

e. Déterminer $u^{n+1}(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f. En déduire une absurdité. INDICATION : Chercher du côté de l'équicontinuité de $\left\{u^n\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$ en a.

5. En déduire une généralisation du théorème démontré dans la partie IV.

VII. Indications

1

Passer par des équivalents.

2

Afin d'étudier la continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$, distinguer les cas $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $x_0 \notin \mathbb{Z}$. La fonction est continue en tout point.

3

La fonction est continue en $\frac{1}{2}$, discontinue en tout autre point de $\mathbb{R}$. On pourra utiliser le critère séquentiel ainsi que la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

4

Il s'agit d'une fonction définie implicitement. Aidez-vous d'une bijection.

5

On pourra s'aider de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) := y^{2n+1} + y$.

6

Passer par les limites à gauche et à droite.

7

On conjecture que f est constante.

8

La fonction est périodique.

9

Quitte à permuter les x_i, ce qui ne change pas la moyenne des $f(x_i)$, vous pouvez supposer que l'on a $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n)$.

10

Appliquer le théorème de Weierstrass à g.

11

Appliquer le théorème de Weierstrass.

12

Se ramener au théorème de Weierstrass.

13

Au 1., considérer $\mathrm{K} := \min(f - g)$ puis raisonner par récurrence sur n. Raisonner par l'absurde au 2.

14

Au 1., considérer une suite minimisante de $\left\{x \in [0,1]\,;\, f(x) = 0\right\}$.

15

Utiliser $t \longmapsto f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)$.

16

Remarquer que, dans les deux cas, f est injective.

17

Utiliser une suite minimisante pour établir que la borne inférieure de F_a est un minimum.

18

Remarquer que g injective donc strictement monotone puis en déduire le comportement de g en $\pm\infty$.

19

Utiliser la fonction $g : x \to f(x) - x$.

20

Pour tout réel x non nul, poser $g(x) = \frac{f(x)-x}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1$.

21

S'intéresser à $\delta : x \longmapsto (f \circ g)(x) - x$. Construire un point fixe de $g \circ f$ à partir d'un point fixe de $f \circ g$.

22

En supposant l'ensemble K des points fixes de f non vide, montrer qu'il est convexe : ie si $f(x) = x$ et $f(y) = y$, alors pour tout $z \in [x, y]$, $f(z) = z$. Exploiter la continuité de f pour montrer que K est fermé.

23

Que dire de la suite $\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)_{n\geqslant 0}$?

24

Reconnaître f sur $f([0,1])$.

25

Remarquer que I est un intervalle : lequel exactement ?

26

Montrer qu'une solution f est nécessairement bijective, impaire et strictement croissante. Déduire de la relation $f \circ f = \mathrm{id}$ que $f = \mathrm{id}$.

27

Au II.2.c., choisir A de façon à vérifier l'implication : $-1 < x < 1 \implies -\mathrm{A} < x + a < \mathrm{A}$.

28

Au I.2.a., on pourra utiliser le critère séquentiel sur les bornes.

VIII. Solutions

1

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations sur les fonctions continues (quotient de deux fonctions continues, le dénominateur étant un produit de fonctions continues).
2. On a $f(x) \sim \frac{\frac{1}{2}\times(2\pi x)^2}{x\ln x} = \frac{2\pi^2 x}{\ln x}$. Comme $\frac{x}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (opérations sur les limites), on a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) := 0$.
3. On a $f(1+u) = \frac{1-\cos(2\pi u)}{(1+u)\ln(1+u)} \sim \frac{\frac{1}{2}\times(2\pi u)^2}{u} = 2\pi^2 u$ d'où $f(1+u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) := 0$.
4. Notons f le prolongement continu de f à $\mathbb{R}_+$.
   - Pour $x \geqslant 2$, on a $x\ln x \geqslant 2\ln 2$ et
   $$\left|f(x)\right| = \left|\frac{1-\cos(2\pi x)}{x\ln x}\right| = \frac{|1-\cos(2\pi x)|}{x\ln x} \leqslant \frac{1+|\cos(2\pi x)|}{2\ln 2} \leqslant \frac{2}{2\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$
   - Comme f est continue, f est bornée sur le segment $[0,2]$.

   Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2

- La fonction $x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ est constante au voisinage de tout point non entier donc continue en ces points. La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - 1/2$ est également continue en tout point non entier. Ainsi f est continue en tout point non entier (opérations sur les fonctions continues).
- Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  - Pour $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ donc $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = (-1)^{n-1}\left(n-(n-1)-\dfrac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}$.
  - Pour $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = (-1)^{n}\left(n-n-\dfrac{1}{2}\right) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}$.

  Ainsi lim $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = \lim\limits_{x\to n^+} f(x) = f(n) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}$: f est continue en n.

  Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

3

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ par le théorème d'encadrement : f est continue en $\frac{1}{2}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = 1 - r_n$ et $f(i_n) = i_n$. Ainsi $f(i_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ et $f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - x_0 \neq x_0$. La fonction f n'est donc pas continue au point x_0.

4

1. Fixons $t \in \mathbb{R}_+$ et considérons $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + tx - 1$. La fonction f est strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes) et continue (opérations sur les fonctions continues) donc par le corollaire du TVI, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$: l'équation $f(x) = 0$ admet donc une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. D'où l'existence et l'unicité de la fonction ϕ.
2. Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(x) = x^{-1} - x^2$. Sur $]0,1]$, g est continue (opérations sur les fonctions continues) et strictement décroissante (somme de deux fonctions strictement décroissante). Comme $g(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$ et $g(1) = 0$, on déduit du corollaire du TVI que g réalise une bijection de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}_+$. L'équation définissant ϕ s'écrivant $g \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$, on a $\phi = g^{-1}$ et ϕ est donc continue.

5

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) := y^{2n+1} + y$. Cette fonction est continue en tant que fonction polynomiale et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur cet intervalle. Comme $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$ et $g(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} -\infty$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que g réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Ainsi, pour tout réel x, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(y) = x$, ce réel est $g^{-1}(x)$. Il existe donc une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x)^{2n+1} + f(x) - x = 0$ et $f = g^{-1}$.
2. Comme $f = g^{-1}$ est g est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On sait que $f(x) = g^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ car $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi $f(x) = o\left(f(x)^{2n+1}\right)$ en $+\infty$ d'où

$$x = f(x) + f(x)^{2n+1} \sim_{x\to+\infty} f(x)^{2n+1}$$

puis $f(x) \sim x^{\frac{1}{2n+1}}$ quand x tend vers $+\infty$.

6

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

⇛ Pour tout $x \geqslant x_0$, on a $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{x_0} f(x_0)$ par croissance de f et décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} f(x_0)$.

⇛ Pour tout $x \leqslant x_0$, on a $f(x_0) \geqslant f(x) \geqslant \frac{x}{x_0} f(x_0)$ par croissance de f et décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} f(x_0)$.

La fonction f est donc continue en x_0.

7

L'ensemble $f\langle\mathbb{R}\rangle$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (par le théorème des valeurs intermédiaires) et non vide. Comme les seuls intervalles réels non vides inclus dans $\mathbb{Z}$ sont les singletons, f est constante.

8

La fonction f étant π-périodique et continue, $f\langle\mathbb{R}\rangle = f\left\langle[0,\pi]\right\rangle$ est un segment (théorème de Weierstrass) : f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in [0,\pi]$ un réel où f atteint son minimum. Supposons $\sin x_0 = 0$. Il existe alors $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 = n\pi$ et donc $\sin(1+n\pi) = (-1)^n \sin 1 \neq 0$. On en déduit que $f(x_0) > 0$.

9

Posons $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Quitte à permuter les x_i, ce qui ne change pas la valeur de m, on peut supposer $f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \ldots \leqslant f(x_n)$. On a alors $f(x_1) \leqslant m \leqslant f(x_n)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_1, x_n] \subset [0,1]$ tel que $f(x) = m$.

10

- Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, on déduit du théorème de Weierstrass qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f \geqslant f(a)$.
- Par croissance de g, on en déduit que $g \circ f \geqslant (g \circ f)(a)$.
- Comme f est à valeurs dans $]0,1]$, $f(a) > 0$ et par stricte croissance de g, on a $(g \circ f)(a) > g(0) = 0$

11

Comme A est bornée, il existe deux réels $m < \mathrm{M}$ tels que $\mathrm{A} \subset [m, \mathrm{M}]$ d'où $f\langle\mathrm{A}\rangle \subset f\left\langle[m,\mathrm{M}]\right\rangle$. Puisque f est continue, $f\left\langle[m,\mathrm{M}]\right\rangle$ est bornée (par le théorème de Weierstrass) donc $f\langle\mathrm{A}\rangle$ l'est aussi.

12

1. Il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{M}, \quad f(x) > f(0)$. Ainsi f est minorée sur $[\mathrm{M}, +\infty[$. Par le théorème de Weierstrass, f est minorée sur le segment $[0,\mathrm{M}]$ et y atteint sa borne inférieure. Ainsi f est minorée sur $[0,+\infty[$ et puisque $f(0) \geqslant \min_{x\in[\mathrm{A},\mathrm{M}]} f(x)$, le minimum de f sur $[0,\mathrm{M}]$ est aussi le minimum de f sur $[0,+\infty[$.
2. Il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall x \geqslant \mathrm{M}, \quad \ell + 1 > f(x) > \ell - 1$. Ainsi f est bornée sur $[\mathrm{M}, +\infty[$. Par le théorème de Weierstrass, f est bornée sur le segment $[0,\mathrm{M}]$. Ainsi f est bornée sur $[0,+\infty[$.

13

1. **a.** Par le théorème de Weierstrass, $\delta := f - g$ étant continue sur le segment $[0,1]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $\delta \geqslant \delta(c) = \min \delta$. Le réel $\mathrm{K} := \delta(c)$ convient donc.

   b. Prouvons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - L'initialisation en $n = 0$ est évidente.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in [0,1], \quad f^n(x) \geqslant n\mathrm{K} + g^n(x)$. Soit $x \in [0,1]$. Comme $f(x)$ et $g^n(x)$ appartiennent à $[0,1]$, on a

     $$f^{n+1}(x) \geqslant n\mathrm{K} + g^n\big(f(x)\big) = n\mathrm{K} + f\left(g^n(x)\right) \geqslant n\mathrm{K} + \mathrm{K} + g\left(g^n(x)\right) = (n+1)\mathrm{K} + g^{n+1}(x)$$

     car f et g commutent. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

2. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \neq g(x)$. La fonction $\delta := f - g$ étant continue et ne s'annulant pas sur l'intervalle, elle y garde un signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires. quitte à permuter f et g, on est ramené au cas du 1. dont on reprend les notations. On a $f^n(0) \geqslant n\mathrm{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $f^n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ceci est absurde car $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(0) \in [0,1]$.

14

1. On déduit du théorème des valeurs intermédiaires que $\mathrm{Z} := \left\{x \in [0,1]\,;\, f(x) = 0\right\}$ est non vide. Puisque Z est minoré par 0, il admet une borne inférieure m. Il existe donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Z}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$. On a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(m)$ par continuité de f en m. Puisque $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par passage à la limite que $f(m) = 0$. D'où l'existence d'un plus petit zéro de f.

2. Il suffit de considérer $f : x \mapsto 0$.

15

1. Pour $t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, posons $g(t) := f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, il existe $(p,q) \in [\![0, n-1]\!]^2$ tels que $g\left(\frac{p}{n}\right) \leqslant 0 \leqslant g\left(\frac{q}{n}\right)$. On déduit du théorème des valeurs intermédiaires l'existence de $t \in [0, 1 - 1/n]$ tel que $g(t) = 0$.

2. **a.** La fonction est continue sur $[0,1]$ en tant que somme de deux fonctions continues sur ce segment. De plus, on a clairement $f(0) = f(1) = 0$.

b. Pour tout t dans $[0,1]$, on a $f(t+c) = f(t)+c$. L'équation $f(t+c) = f(t)$ n'admet donc aucune solution sur $[0,1]$.

c. On déduit des questions précédentes que les seules cordes universelles sont les inverses des entiers naturels non nuls.

16

1. On déduit de l'inégalité vérifiée par f que cette fonction est injective sur $\mathbb{R}$. Puisqu'elle est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on déduit du cours que f est strictement monotone.

2. ⇛ Supposons f strictement croissante. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) \geqslant f(0) + x$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a $-f(x) \geqslant -f(0) - x$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

⇛ Supposons f strictement décroissante. La fonction $-f$ est strictement croissante et vérifie les mêmes hypothèses que f, donc par le point précédent $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

Dans les cas, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

3. Raisonnons par l'absurde : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

⇛ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(y) = f(x)$. On a alors $f^2(y) = f^2(x)$ par application de f, d'où $y = x$. On en déduit que f est injective et, puisqu'elle est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, f est strictement monotone.

⇛ Comme f est strictement monotone, f^2 est strictement croissante ce qui est absurde car f^2 est strictement décroissante.

17

1. Notons $u_a : x \mapsto x - f(x+a)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions continues). Comme f est positive, on a $u_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. Comme f est majorée, on a $u_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On déduit du théorème des valeurs intermédiaires, l'existence de $y \in \mathbb{R}$ tel que $u_a(y) = 0$, ie $f(y+a) = y$. Ainsi $\mathrm{F}_a \neq \varnothing$. Comme f est positive, on a $u_a(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$. Ainsi $\mathrm{F}_a = \left\{y \in \mathbb{R}\,;\, u_a(y) = 0\right\} \subset \mathbb{R}_+$.
2. L'ensemble F_a est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0 (cf. la question précédente). On en déduit l'existence de $x_a := \inf \mathrm{F}_a$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{F}_a^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_a$. On a $f(x_n + a) = x_n$ $(\star)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est continue en $a + x_a$, on a $f(x_n + a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a + x_a)$ et on déduit de $(\star)$ par passage à la limite que $f(x_a + a) = x_a$, d'où $x_a \in \mathrm{F}_a$.
3. La fonction $\delta := u_0$ est strictement croissante en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes, continue, de limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$) d'après l'étude fait précédemment de u_0. On déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que δ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.
4. On a $f(x_a + a) + a = x_a + a$ d'où $\delta(x_a + a) = a$ d'où $x_a + a = \delta^{-1}(a)$ d'où $x_a = \delta^{-1}(a) - a$.
5. Comme δ est continue sur $\mathbb{R}$, sa bijection réciproque est continue sur $\delta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ainsi $a \mapsto x_a$ est continue en tant que somme de deux fonctions continues.

18

- $\Rrightarrow$ Comme $f \circ g$ est injective (resp. surjective), g est injective (resp. f est surjective).
- $\Rrightarrow$ Comme g est injective et continue sur $\mathbb{R}$, g est strictement monotone. On déduit du théorème de la limite monotone que g admet des limites ℓ_- et ℓ_+ dans $\overline{\mathbb{R}}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
- $\Rrightarrow$ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell_+ \in \mathbb{R}$. On a $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_+$ et $f(y) \xrightarrow[y\to\ell_+]{} f(\ell_+)$ par continuité de f en ℓ_+, d'où $(f \circ g)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(\ell_+) \in \mathbb{R}$ par composition des limites. Ceci est absurde car $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. De même, on démontre que $\ell_- \notin \mathbb{R}$. Ainsi $(\ell_-, \ell_+) = (-\infty, +\infty)$ ou $(\ell_-, \ell_+) = (+\infty, -\infty)$.
- $\Rrightarrow$ La fonction g réalise dans une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc $f = (f \circ g) \circ g^{-1} = g^{-1}$ est bijective.

19

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x$. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}$, elle admet en $+\infty$ une limite $l_+ \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. En particulier 0 admet un antécédent x_0 par g, d'où $f(x_0) = x_0$. L'unicité vient de la stricte décroissance de g.

20

1. Posons $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$. On a $\frac{\delta(x)}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \ell - 1$.

- ⇛ Cas 1 : $\ell > 1$. Il existe $A > 0$ et $B < 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $\frac{\delta(x)}{x} > 0$ et $\forall x \leqslant B$, $\frac{\delta(x)}{x} > 0$. En particulier $\delta(A)\delta(B) < 0$. Puisque δ est continue (somme de fonctions continues), on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que δ s'annule en un point de $\mathbb{R}$, d'où l'existence d'un point fixe de f.
- ⇛ Cas 2 : $\ell < 1$. On adapte sans peine la preuve donnée dans le premier cas (il suffit d'échanger quelques signes).

2. La conclusion n'est plus valable en général comme le prouve le contre-exemple suivant : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$

21

- ⇛ Par le théorème de la limite monotone, $f \circ g$ admet une limite valant $-\infty$ ou un réel (resp. $+\infty$ ou un réel) en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- ⇛ La fonction $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f \circ g)(x) - x$ est strictement décroissante (somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante), $\delta(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et $\delta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ d'après le point précédent. Comme δ est continue (somme de fonctions continues), on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que δ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. La fonction δ s'annule donc une seule fois sur $\mathbb{R}$: $f \circ g$ admet un unique point fixe.
- ⇛ Notons α l'unique point fixe de $f \circ g$. On a alors $g(\alpha)$ est un point fixe de $g \circ f$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ un point fixe de $g \circ f$. On a $(g \circ f)(\beta) = \beta$ d'où $f(\beta)$ est un point fixe de $f \circ g$. Ainsi $f(\beta) = \alpha$ d'où $g(\alpha) = \beta$, ce qui prouve l'unicité du point fixe de $g \circ f$.

22

Notons K l'ensemble des points fixes de f. Supposons $K \neq \varnothing$.

- ⇛ Soit $(x, y) \in K^2$ tel que $x < y$. Soit $z \in]x, y[$. Raisonnons par l'absurde. Supposons $f(z) \neq z$.
  - ➰ Supposons $f(z) > z$. On a alors $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} > \frac{z-x}{z-x} > 1$.
  - ➰ Supposons $f(z) < z$. On a alors $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} > \frac{z-x}{z-x} > 1$.

  Ceci est absurde car f est 1-lipschitzienne. L'ensemble K est donc convexe, c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- ⇛ Comme $K \subset [0,1]$ et $K \neq \varnothing$, K admet des bornes inférieure et supérieure. Soit $\mu = \inf K$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $k_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(k_n) = k_n$, on obtient pas passage à la limite $f(\mu) = \mu$ par continuité de f en μ. Ainsi $\mu \in K$. On prouve par un raisonnement analogue que $\sup K \in K$.

L'ensemble K est donc un segment.

23

- ⇛ Analyse. Soit f une solution. Par une récurrence facile, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ $(\star)$. Par continuité de f en 0, on a $f(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0)$. Par passage à la limite dans $(\star)$, on obtient donc $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constante.
- ⇛ Synthèse. Toute fonction constante vérifie clairement l'équation initiale.

24

On effectue une Analyse-Synthèse.

⇛ ANALYSE. Soit f une solution. On note $S = f([0,1])$.

- L'ensemble S est un segment de $\mathbb{R}$ en tant qu'image du segment $[0,1]$ par l'application continue f. Comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a $S \subset [0,1]$. On le notera $S = [a,b]$, avec $a = \min_{t\in[0,1]} f(t)$ et $b = \max_{t\in[0,1]} f(t)$.
- En particulier la restriction de f à $[0,a]$ (resp. $[b,1]$) est un élément de $\mathscr{C}^0([0,a],[a,b])$ (resp. $\mathscr{C}^0([b,1],[a,b])$).

⇛ SYNTHÈSE. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \leqslant b$, $(g,d) \in \mathscr{C}^0([0,a],[a,b]) \times \mathscr{C}^0([b,1],[a,b])$ tel que $g(a) = a$ et $d(b) = b$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

- $\forall t \in [a,b],\ f(t) = t.$
- $\forall t \in [0,a],\ f(t) = g(t).$
- $\forall t \in [b,1],\ f(t) = d(t).$

On vérifie facilement que f est continue sur $[0,1]$ (le raccord se fait bien par continuité en a et b). De plus, pour $t \in [0,1]$, $f(t) \in [a,b]$ d'où $f\big(f(t)\big) = f(t)$. Ainsi f est solution.

25

1. Soit $y \in I$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ d'où $f(y) = y + 1$.
2. Par le TVI, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, I n'est pas minoré. Soit $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^n(a) = a + n$ par la question précédente. On en déduit que I n'est pas majoré. Ainsi $I = \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = y + 1$.

26

⇛ ANALYSE. Soit f une solution.

- On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(y) = y + f(0)^2$. Comme $f \circ f$ est injective, f est injective.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(-x)^2 = f\left((-x)^2 + f(0)\right) = f\left(x^2 + f(0)\right) = f(x)^2$. Ainsi $f(-x) = \pm f(x)$. Puisque $-x \neq x$ et f est injective, on a $f(-x) = -f(x)$. Par continuité de f en 0, on en déduit que $f(0) = -f(0)$, ie $f(0) = 0$. Ainsi f est impaire.
- Comme f est continue et injective sur $\mathbb{R}$, elle est strictement monotone. Puisque f est injective et $f(0) = 0$, on a $f(1) \neq 0$ d'où $f(1) = f(1^2 + 0) = f(1)^2 > 0 = f(0)$, f est strictement croissante.
- On a donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(y) = y$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $f(y) \neq y$.
  - Cas 1 : $f(y) > y$. On a alors $f^2(y) > f(y) > y$ par stricte croissance de f : c'est absurde.
  - Cas 2 : $y > f(y)$. On a alors $f^2(y) < f(y) < y$ par stricte croissance de f : c'est absurde.

  On en déduit que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

⇛ SYNTHÈSE. La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est clairement solution.

La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est l'unique solution au problème.

27

Partie I – Solutions continues de E

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de **E**.

a. En choisissant $(x, y) = (0, 0)$, on obtient $f(0) = 0$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on obtient donc $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, i.e. $f(-y) = f(y)$. Ainsi f est paire.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = n^2 f(x)$ par récurrence forte sur n.

⇛ L'initialisation est claire car $f(0) = 0$ et $f(1 \times x) = 1 \times f(x)$.

⇛ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. On a

$$\begin{aligned} f((n+1)x) = f(nx + x) = 2f(nx) + 2f(x) - f(nx - x) &= 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n-1)^2 f(x) \\ &= \left(2n^2 + 2 - n^2 + 2n - 1\right) f(x) = (n+1)^2 f(x) \end{aligned}$$

d'où la formule au rang $n+1$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On a $f\left(\frac{p}{q}x\right) = p^2 f\left(\frac{x}{q}\right)$ la question précédente. De plus $f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{f(x)}{q^2}$ car, par la question précédente :

$$f(x) = f\left(q\frac{x}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{x}{q}\right)$$

Ainsi $f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p^2}{q^2} f(x)$ puis, par parité de f (cf. la question I.1.a.), $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx) = r^2 f(x)$.

d. Supposons que f est bornée au voisinage de 0. il existe alors $\alpha > 0$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ \left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$$

Soit A dans $\mathbb{R}_+^*$. Comme $n\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0\alpha > \mathrm{A}$. Soit $x \in]-\mathrm{A}, \mathrm{A}[$. Comme $\frac{x}{n_0} \in]-\alpha, \alpha[$, on a

$$\left|f(x)\right| = n_0^2 \left|f\left(\frac{x}{n_0}\right)\right| \leqslant n_0^2 \mathrm{M}$$

par la question I.1.b. Ainsi, f est bornée sur $]-\mathrm{A}, \mathrm{A}[$.

2. Soit f solution continue de **E**. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. Comme $f(r_n) = r_n^2 f(1)$ (cf. la question I.1.b.) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient $f(x) = x^2 f(1)$ par passage à la limite dans cette relation, par continuité de f en x. Réciproquement, toute fonction de la forme $x \mapsto \lambda x^2$ est clairement solution.

Partie II – Solutions bornées au voisinage de 0 de E

1. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\phi(x) = \dfrac{\phi\left(p^n x\right)}{q^n}$.

⇛ La propriété est banale au rang 0 car $p^0 = q^0 = 1$.

⇛ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. On a

$$\phi\left(p^{n+1}x\right) = q\phi\left(p^n x\right) = q^{n+1}\phi(x)$$

'd'où la formule rang $n+1$.

b. Soit $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que $\forall x \in]-\alpha,\alpha[,\ \left|\phi(x)\right| \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{M}{q^n} \leqslant \varepsilon$. Pour $x \in \left]-\frac{\alpha}{p^{n_0}}, \frac{\alpha}{p^{n_0}}\right[$, on a donc

$$\left|\phi(x)\right| = \left|\frac{\phi\left(p^{n_0}x\right)}{q^{n_0}}\right| \leqslant \frac{M}{q^{n_0}} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $\phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Comme $\phi(0) = 0$ (évaluez dans l'équation en $x = 0$), ϕ est continue en 0.

2. **a.** On déduit du I.1.b. que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 4f(x)$. Ainsi, par la question II.1., f est continue en 0.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g(2x) &= f(a+2x) - f(a) - f(2x) = f(a+x+x) - f(a) - 4f(x) = 2f(a+x) + 2f(x) - f(a) - f(a) - 4f(x) \\ &= 2\left(f(a+x) - f(a) - f(x)\right) = 2g(x) \end{aligned}$$

c. Notons $A := \max(|a-1|, |a+1|)$. On sait que f est bornée sur $]-A, A[$ par le I.1.d. Ainsi $x \mapsto f(x+a)$ est bornée sur $]-1,1[$ tout comme $x \mapsto f(x)$ (toujours par le I.1.d.) donc g est aussi bornée sur $]-1,1[$ en tant que somme de fonctions bornées sur cet intervalle.

Commentaire

On a choisit A de façon à vérifier l'implication : $-1 < x < 1 \implies -A < x + a < A$.

d. On déduit des deux questions précédentes et su II.1. que g est continue en 0. Ainsi, par continuité de f en 0 (cf; Le II.2.a.) $f(x+a) - f(a) = g(x) + f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) + f(0) = 0$ par opérations sur les limites. Ainsi f est continue en a. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est de la forme $x \mapsto ax^2$ par la partie I.

28 ↺

Partie I – Intersection des graphes dans le cas général

1. Soit δ la fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x) := f(x) - x$; δ est continue en tant que différence de deux fonctions continues. Comme $[a,b]$ est stable par f, on a $\delta(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $\delta(b) = u(b) - b \leqslant 0$. On déduit du théorème des valeurs intermédiaires l'existence de c dans $[a,b]$ tel que $\delta(c) = 0$.

2. **a.** L'ensemble F non vide (par la question précédente appliquée à u sur $[0,1]$), majoré et minoré (car inclus dans $[0,1]$), il admet donc des bornes supérieure et inférieure; nous les noterons m et M. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$. Par continuité de f en m, on a $f(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(m)$. Comme $c_n = f(c_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par passage à la limite quand $n \to +\infty$ que $f(m) = m$. Ainsi $m \in F$. On démontre de même que $M \in F$.

b. Soit $x \in \mathrm{F}$. On a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(x)$. Ainsi $v(x) \in \mathrm{F}$. L'ensemble F est donc stable par v.

c. Comme $(m, \mathrm{M}) \in \mathrm{F}^2$ et F est stable par v, on en déduit que $\inf \mathrm{F} = m \leqslant v(m)$ et $v(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{M} = \sup \mathrm{F}$. On a $m = u(m)$ et $\mathrm{M} = u(\mathrm{M})$. Ainsi, $u(m) \leqslant v(m)$ et $v(\mathrm{M}) \leqslant u(\mathrm{M})$. La fonction $f := u - v$ est continue sur $[m, \mathrm{M}]$ et vérifie $f(\mathrm{M}) \geqslant 0$ et $f(m) \leqslant 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires l'existence de c dans $[m, \mathrm{M}]$ tel que $f(c) = 0$, i.e. $u(c) = v(c)$.

3. a. Posons $f := u - v$. Comme f ne s'annule pas et est continue sur l'intervalle $[0,1]$ (en tant que différence de deux fonctions continues), on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que f est de signe constant sur $[0,1]$. Ainsi $u - v > 0$ ou $v - u > 0$.

b. La fonction continue $f = u - v$ admet un minimum μ sur le segment $[0,1]$ par le théorème de Weierstrass. Comme $f > 0$, on a $\mu > 0$ et donc $\forall t \in [0,1], \quad u(t) \geqslant \lambda + v(t)$.

c. Prouvons la propriété par récurrence sur n.

⇛ La propriété est clairement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

⇛ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit $t \in [0,1]$. Comme $u(t) \in [0,1]$, on a

$$u^{n+1}(t) \geqslant \underbrace{v^n(u(t)) + n\lambda}_{= u\left(v^n(t)\right) + n\lambda}$$

car $u \circ v^n = v^n \circ u$. Comme $u(v^n(t)) \geqslant v(v^n(t)) + \lambda$, on en déduit que $u^{n+1}(t) \geqslant v^{n+1}(t) + (n+1)\lambda$, i.e. l'hypothèse au rang $n+1$.

d. On déduit de la question précédente que $u^n(0) \geqslant \lambda n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lambda > 0$, on en déduit que $u^n(0) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$. Ceci est absurde car $u^n(0) \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II – Étude du cas où l'une des deux fonctions est monotone

1. a. On reprend les notations et la démonstration du I.1. dans le cas où $f := u$ et $(a, b) := (0,1)$. Comme u est décroissante, $\delta : x \mapsto u(x) - x$ est strictement décroissante : le point où δ s'annule est donc unique.

b. Notons c l'unique point fixe de u. On a $v(c) = v(u(c)) = u(v(c))$, ainsi $v(c)$ est un point fixe de u, d'où $u(c) = c$ par unicité de celui-ci.

2. a. Notons F' l'ensemble des points fixes de v. Par symétrie des hypothèses sur u et v du I.1.a., on déduit du I.1.a. que G est non vide. il existe donc $a_0 \in \mathrm{F}'$. On considère alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = u(a_n)$. Elle existe bien car $[0,1]$ est stable par u. De plus, comme F' est stable par u (cf. le I.?.) et $a_0 \in \mathrm{F}'$, on prouve par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathrm{G}$, i.e. $v(a_n) = a_n$.

b. Supposons $a_1 \leqslant a_0$. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a_{n+1} \leqslant a_n$. On a donc $u(a_{n+1}) \leqslant u(a_n)$ par croissance de u, d'où $a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$ et la propriété est vraie au rang $n+1$. On démontre de même que si $a_0 \leqslant a_1$, alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc monotone et bornée (car elle est à valeurs dans $[0,1]$), elle converge donc par le théorème de la limite monotone.

c. Notons ℓ la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme u et v sont continues en ℓ, on a

$$u(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} u(\ell) \quad \text{et} \quad v(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} v(\ell)$$

On obtient donc $u(\ell) = \ell$ et $\ell = v(\ell)$ par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = u(a_n)$ et $a_{n+1} = v(a_n)$. Ainsi ℓ est un point commun à u et v.

Partie III – Étude du cas où l'une des deux fonctions est 1-lipschitzienne

1. Soit $x \in [m, \mathrm{M}]$. On a
$$u(x) - u(m) \leqslant |u(x) - u(m)| \leqslant |x - m| = x - m$$
Comme $u(m) = m$, on en déduit que $u(x) \leqslant x$. De plus :
$$u(\mathrm{M}) - u(x) \leqslant |u(\mathrm{M}) - u(x)| \leqslant |\mathrm{M} - x| = \mathrm{M} - x$$
Comme $u(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, on obtient $u(x) \geqslant x$. Ainsi $u(x) = x$ d'où $[m, \mathrm{M}] \subset \mathrm{F}$. L'inclusion réciproque est vraie car m et M sont les bornes inférieures et supérieures de F.

2. Comme $\mathrm{F} = [m, \mathrm{M}]$ est stable par v (cf. le I.2.b.), on déduit du I.1. que v admet un point fixe dans $[m, \mathrm{M}]$. Ainsi u et v ont un point fixe commun.

Partie IV – Ensembles équicontinus et théorème de Cano

1. a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a $|p_n(x) - p_n(0)| = x^n \leqslant x$ si $n \neq 0$ et $|p_0(x) - p_0(0)| = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ et $\delta := \varepsilon$, on a donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |x| \leqslant \delta \implies \left|p_n(x) - p_n(0)\right| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi $\mathscr{M}$ est équicontinu en 0.

b. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathscr{M}$ est équicontinu en 1. Il existe alors $\delta > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |x - 1| \leqslant \delta \implies \left|x^n - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$$
En particulier, $|(1-\delta)^n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est absurde car $(1-\delta)^n - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in]0,1[$ et $\rho > 0$ tel que $[a - \rho, a + \rho] \subset]0,1[$.
Pour $x \in [a - \rho, a + \rho]$, on a $x^n - a^n = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1}$ d'où
$$\left|x^n - a^n\right| \leqslant |x - a|\, n(a + \rho)^{n-1}$$
Comme $n(a+\rho)^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées, il existe une constante K telle que $n(a + \rho)^{n-1} \leqslant \mathrm{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta := \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\mathrm{K}}\right)$. Par ce qui précède, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a - \delta, a + \delta],\ \left|x^n - a^n\right| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi $\mathscr{M}$ est-il équicontinu en a.

Remarque

Pour $n = 0$, on a $|x^n - a^n| = 0$ c'est pour cela que nous sommes placés directement sous l'hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$.

2. C'est clair car pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x, a) \in [0,1]^2$, on a
$$\left|u^n(x) - u^n(a)\right| \leqslant |x - a|$$

3. Comme F n'est pas un intervalle, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathrm{F}^2$ tel que $\alpha < \beta$ et $\exists \gamma \in]\alpha, \beta[$ vérifiant $\gamma \notin \mathrm{F}$. Supposons $u(\gamma) > \gamma$. Notons
$$a := \sup\left\{x \in \mathrm{F}\,;\, x < \gamma\right\} \quad \text{et} \quad b := \inf\left\{x \in \mathrm{F}\,;\, x > \gamma\right\}$$
Ces bornes existent car les deux ensembles sont non vides (ils contiennent respectivement α et β) et sont bornés. Montrons que a est un maximum. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\left\{x \in \mathrm{F}\,;\, x < \gamma\right\}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a. On a $a \leqslant \gamma$ par passage à la limite dans l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < \gamma$. Comme $u(a_n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à la limite que $u(a) = a$ donc $a < \gamma$. On prouve de même que b est un maximum. Comme $\mathrm{F} \cap]a, b[= \varnothing$, la fonction $x \mapsto u(x) - x$ est continue et s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que δ garde un signe constant sur $]a, b[$. Ainsi $\forall x \in]a, b[,\ u(x) > x$ ou $\forall x \in]a, b[,\ u(x) < x$.

4. **a.** Il suffit d'appliquer la définition de l'équicontinuité en a avec $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$.

b. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\forall x \in]a, b[,\ u(x) \leqslant b$. L'intervalle $]a, b]$ est alors stable par u donc $u^n(a') \in]a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(a') < u^{n+1}(a') = u\big(u^n(a')\big)$. Ainsi $(u^n(a'))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par b, elle converge donc vers un réel $\ell \in]a, b]$. Comme u est continue, ℓ est un point fixe de u. Or, sur $]a, b]$, le seul point fixe de u est b. Ainsi $\ell = b$. Ceci est absurde, car par passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité de la question précédente, on obtient $|b - a| \leqslant \frac{b-a}{2}$.

c. Il existe c dans $]a, b[$ tel que $u(c) > b$. Comme $u(c) > b > u(a)$ car $u(a) = a$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires l'existence de $x_0 \in]a, c[$ tel que $u(x_0) = b$.

d. Comme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par a, elle converge vers une limite $\ell \in [a, b[$. Par continuité de u en ℓ, on déduit de la relation de récurrence par passage à la limite $n \to +\infty$ que $\ell = u(\ell)$. Comme l'unique point fixe de u sur $[a, b[$ est a, on a $\ell = a$.

e. On trouve que $u^{n+1}(y_n) = b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par une récurrence facile.

f. Appliquons la définition de l'équicontinuité de $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon := \frac{b-a}{2}$. Il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in [0,1]\,,\ |x - a| \leqslant \delta \implies \left|u^p(x) - a\right| \leqslant \frac{b-a}{2}$$
Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_{n_0} - a| \leqslant \delta$. On a
$$|b - a| = \left|u^{n_0+1}(y_{n_0}) - a\right| \leqslant \frac{b-a}{2}$$
Ce qui est absurde.

5. On a démontré que, sous les hypothèses de ce sujet (cf. le début de l'énoncé), l'équicontinuité de $\left\{u^n\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$ est une condition suffisante pour que les graphes de u et v aient une intersection non vide.