AN 10 | Équations linéaires en analyse

Ils ont donc pris pour certain que les jugements de Dieu dépassent de très loin la portée de l'intelligence humaine; et cette seule raison, certes, eût suffi pour que la vérité demeurât à jamais cachée au genre humain, si la Mathématique, qui s'occupe non des fins, mais seulement des essences et des propriétés des figures, n'avait montré aux hommes une autre règle de vérité.

Spinoza

Bouddha, Odilon Redon

10 Équations linéaires en analyse 1
- I Équations différentielles linéaires d'ordre un 2
- II Équations différentielles linéaires d'ordre deux 2
- III Équations fonctionnelles 3
- IV Équations de récurrences linéaires 4
- V Indications 5

I. Équations différentielles linéaires d'ordre un

1 — *Première salve* f

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
2. $x^3 y' - x^2 y = 1$;
3. $x\ln(x) y' - y = -\dfrac{\ln(x)+1}{x}$;
4. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$;
5. $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$;
6. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$;
7. $y'\sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$;
8. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$;
9. $2x^2 y' + y = 1$;

2 — *Un problème de raccord* f

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation E_1 : $xy' - 2y = x^4$.

3 — *Recollement de solutions en* 0 f

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation E_2 : $x\left(1+x^2\right)y' - \left(x^2-1\right)y + 2x = 0$.

4 — *Deux équations* ff

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $y' - y = \arctan e^x$ et $y' + y = \arctan e^x$.

II. Équations différentielles linéaires d'ordre deux

5 — *EDL en vrac* f

Calculer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t$;
2. $y'' + 4y' + 3y = te^{-2t}$;
3. $y'' + 4y' + 3y = \cos(3t)$;
4. $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$;
5. $y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$;
6. $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$;
7. $y'' + 5y' + 4y = te^{-t}$;
8. $y'' + y = \cos(t)$;
9. $y'' - 6y' + 9y = (t+1)e^{-3t}$;
10. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$;
11. $y'' + 4y = \sin^2(t)$;
12. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x)$.

6 — *Une équation à paramètre f*

Pour $\phi \in \mathbb{R}$, on pose E_ϕ : $y'' - 2\cos(\phi)y' + y = e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à E_ϕ. On discutera sur $\phi \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre E_ϕ pour $\phi \in \mathbb{R}$.

7 — *Une équation linéaire d'ordre deux f*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + y = 0$ en posant $x = \tan t$.

8 — *Changements de variable trigonométriques ff*

On considère l'équation $\left(1-x^2\right)y'' - xy' + y = 0$.

1. Intégrer cette équation pour $-1 < x < 1$, en posant $x = \sin(t)$.
2. Intégrer cette équation pour $x > 1$ et $x < -1$.

9 — *Conditions aux limites ff*

Soit $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ et E : $y'' + by' + cy = 0$. On suppose que E possède une solution f non identiquement nulle telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $b^2 - 4c < 0$ puis établir que $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = 0$.

III. Équations fonctionnelles

10 — *Une équation fonctionnelle f*

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)f(y)$.

11 — *Posé aux mines ff*

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = xe^{-x}$.

12 — *Caractérisation fonctionnelle des exponentielles ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
2. Que dire de f si $f(0) = 0$?

3. On suppose que $f(0) \neq 0$.

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle d'ordre un.

4. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

IV. Équations de récurrences linéaires

13 — *Une récurrence d'ordre un* f

Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 3^{2n} u_n = 3^{n^2}$.

V. Indications

1 ↺

Variation de la constante sauf peut-être au 1.

2 ↺

Résoudre sur $\mathbb{R}-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ par la méthode de la variation de la constante.

3 ↺

Résoudre sur $\mathbb{R}-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ par la méthode de la variation de la constante.

4 ↺

Faîtes varier la constante et intégrer par parties.

5 ↺

Solutions particulières en polynôme-exponentielle.

6 ↺

L'équation caractéristique nécessite une disjonction de trois cas.

7 ↺

On se ramène à une équation linéaire à coefficients constants.

8 ↺

Penser aux fonctions hyperboliques pour $x > 1$ et $x < -1$.

9 ↺

Raisonner par l'absurde pour le discriminant.

10 ↺

Analyse-synthèse. On prouvera que f est *nécessiarement* solution d'une EDL d'ordre deux.

11 ↺

Raisonner par Analyse-Synthèse. On trouvera que f est *nécessairement* solution d'une EDL d'ordre deux.

12 ↺

Intégrer selon y de 0 à 1 afin d'exprimer $x \mapsto f(x)$ au moyen de fonction dérivables.

13

Méthode de la variation de la constante.