AN 11 | Développements limités

L'approche est toujours plus belle que l'arrivée.

Alain-Fournier

La conversion de Saint-Paul, Caravage

I. Relations de comparaison

1 — *Une salve d'équivalents*

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage du point indiqué :

1. $\sin\ln(1+x)$ en 0 ; **2.** $\dfrac{e^{(\sin x)^2}-1}{\tan x}$ en 0 ; **3.** $x^{-\frac{1}{x}}-1$ en $+\infty$; **4.** $\lfloor x\rfloor$ en $+\infty$; **5.** $\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ en $+\infty$;

2. x^x-e^x en $+\infty$; **7.** $\tan x$ en $\dfrac{\pi}{2}$; **8.** $\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$ en $a>0$; **9.** $(\ln x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ en 1 ;

10. $\ln\sin x$ en $0+$; **11.** $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ en $+\infty$; **12.** $(x+1)^a-x^a$ en $+\infty$ (pour $a>0$).

2 — *Une seconde salve d'équivalents* ƒ

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $\ln(1+x)-\sin\left(x^2\right)$ au voisinage de 0 ; **2.** $\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{x}$ au voisinage de $+\infty$;

3. $\dfrac{e^x-1}{\cos x-1}$ au voisinage de 0 ; **4.** $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln\sin(\pi x)}$ au voisinage de 1^- ;

5. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$; **6.** $\dfrac{x^{(x^2)}-1}{(\sin x)^{\sin x}-1}$ au voisinage de 0^+.

3 — *Un peu de calcul asymptotique* ƒƒ

Calculer un équivalent :

1. en 0 de $\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{2}{x}$; **2.** en $+\infty$ de $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$;

3. en $+\infty$ de $\ln\ln(ax+b)-\ln\ln x$, $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$; **4.** en $+\infty$ de $(\cosh x)^\alpha-(\sinh x)^\alpha$ pour $\alpha>0$.

II. Développements limités et asymptotiques

4 — *Quelques calculs* ƒ

Déterminer les $\mathrm{DL}_n(0)$ suivants :

1. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$, $n=2$; **2.** $\ln(1+\ln(1+x))$, $n=3$; **3.** $\exp\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, $n=4$; **4.** $\sqrt{2+x}$, $n=2$;

5. $\arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$, $n=2$; **6.** $(\cos x)^{\sin x}$, $n=2$; **7.** $\ln\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\cos x\right)\right)$, $n=2$;

8. $\ln\cos x$, $n=4$; **9.** $\dfrac{x}{e^x-1}$, $n=2$; **10.** $\exp(\exp x)$, $n=2$.

5 — *Quelques développements à l'ordre deux ƒ*

Donner les $\mathrm{DL}_2(0)$ des expressions suivantes :

1. $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$; **2.** $\dfrac{x}{\tan x}$; **3.** $\exp(\arctan x)$; **4.** $(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}$.

6 — *Un développement asymptotique ƒ*

Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

7 — *Un DAS ƒ*

Déterminer un développement asymptotique à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ de $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

8 — *Le contre-exemple de Cauchy ƒ*

Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

9 — *Académique ƒƒ*

Pour quelles valeurs entières de n la fonction $f : x\neq 0\mapsto |x|^{9/4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet-elle un $\mathrm{DL}_n(0)$?

10 — *DL d'une bijection ƒƒ*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $x\mapsto xe^{x^2}$.

1. Prouver que f est une bijection. Justifier que f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Calculer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de f^{-1}.

11 — *Quelques calculs plus astucieux ƒƒ*

1. Pour tout entier n, calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\ln\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right)$.

2. Pour tout entier n, calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)$

3. Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\int_x^{x^2} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$.

III. Application aux formes indéterminées

12 — *Un peu d'asymptotique* f

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n := a\ln(1+n)+b\ln(2+n)+c\ln(3+n)$.

1. Donner un développement asymptotique de u_n à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Discuter en fonction de (a,b,c) le comportement asymptotique de u_n.

3. Discuter en fonction de (a,b,c) le comportement asymptotique de $(nu_n)^n$.

13 — *Où s'arrêter ?* f

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)^4}\left(\sin\left(\frac{x}{1+x}\right)-\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)$.

14 — *Le grand classique du genre* f

Soit a, b et c dans $\mathbb{R}_+^*$. Étudier le comportement en $+\infty$ de $f : x\mapsto \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$.

15 — *Posé aux mines* ff

Étudier le comportement asymptotique de $u_n = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{6n+1}\right)\right)^n$.

16 — *Une forme indéterminée intégrale* ff

Déterminer la limite en 0 de $\phi : x\mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$.

IV. Application à l'étude locale des fonctions

17 — *Asymptote*

Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on pose $f(x) := \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

1. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote Δ en $\pm\infty$.
2. Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de Δ au voisinage de $\pm\infty$.

18 — *Une étude aux deux bornes f*

Soit $a > 0$ et $f_a : x > 0 \longmapsto x^{\frac{x+a}{x}}$.

1. La fonction f_a admet-elle une asymptote en $+\infty$?
2. Démonter que la fonction f_a est-elle prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

19 — *Mines-Pont MP-2012 ff*

Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \longmapsto \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1}{\tan 2x}}$. Donner l'allure de la courbe au voisinage de 0.

V. Application aux équations différentielles

20 — *Problèmes de raccord pour une équation différentiel ff*

Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{E}_1 : |x|\, y' + (x-1)\, y = x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $\mathrm{E}_2 : |x(x-1)|\, y' + y = x^2$ sur $]-\infty, 1[$, $]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$

VI. Sommes et intégrales

21 — *Développement asymptotique de la suite des moments ff*

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puis déterminer un DAS de u_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En supposant que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

22 — *X-PC 2012 fff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
Étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

23 — *X-PC 2010 fff*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable en 0. Étudier le comportement asymptotique de $u_n := \sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$.

VII. Suites définies implicitement

24 — *Étude d'une suite implicite ff*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $x^n + x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique solution x_n.
2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 1}$ puis son comportement asymptotique.
3. Démontrer que $x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

25 — *Un développement asymptotique ff*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $]0,1]$ que l'on note u_n. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o\left(e^{-2n}\right)$$

26 — *Développement asymptotique d'une suite implicite ff*

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x = 3$ possède une unique solution x_n dans $]1,2]$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose $\delta_n := x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\delta_n \sim \frac{\ln 2}{n}$ puis

$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(\ln 2)(\ln 2 - 1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

27 — *Développement asymptotique d'une suite implicite ƒƒƒ*

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on note (E_n) l'équation $\sin x = \dfrac{x}{n}$ d'inconnue $x \in]0, \pi[$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, (E_n) admet une unique solution x_n.
2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 2}$ puis son comportement asymptotique.
3. Démontrer que $x_n = \pi - \dfrac{\pi}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. En exploitant le $\mathrm{DL}_3(0)$ de l'arcsinus, déterminer un DAS de x_n à la précision $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

28 — *Intersections de la courbe de la tangente et de la première bissectrice ƒƒƒ*

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\tan x = x$ admet une unique solution u_n dans $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n\pi$. Prouver que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et calculer sa limite ℓ.
4. Déterminer un équivalent de $v_n - \ell$.
5. En déduire un développement asymptotique à 3 termes de u_n.

29 — *X PC-2013 ƒƒƒ*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $xe^x = n$. On le note x_n.
2. Prouver la divergence vers $+\infty$ de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ puis déterminer un équivalent de x_n.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

VIII. Suites récurrentes

30 — *Équivalent d'une suite récurrente ƒ*

Déterminer un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \dfrac{2u_n + 1}{3u_n + 1}$.

31 — *Développement asymptotique d'une suite récurrente ƒƒ*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a une limite.
2. Établir que $u_n = \mathrm{O}(n)$ et en déduire un équivalent de u_n.
3. Démontrer que $u_n = n - \dfrac{1}{2} + o(1)$ puis $u_n = n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

IX. Formules de Taylor

32 — *Approximations de f''* f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$.

33 — *Une forme indéterminée* f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$.
Pour un réel a quelconque, étudier le comportement quand $x \to +\infty$ de $f\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^x$.

34 — *CNS de maximum local sous une hypothèse supplémentaire* f

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose l'existence de $m := \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,;\, f^{(k)}(a) \neq 0\right\}$.

1. Donner un équivalent de $f(x) - f(a)$ au voisinage de a.
2. On suppose que $f(a) = 0$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\}$, $f(x) \neq 0$.
3. On revient au cas général. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un maximum local en a.

35 — *Un calcul de limite* f

On note dans tout l'exercice $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ et on fixe x dans I.

1. Établir l'existence d'un réel $c \in]0, x[$ tel que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{(1+c)^2}$.

   Considérer une fonction de la forme $t \mapsto \ln(1+t) - t - \mathrm{M}\dfrac{t^2}{2}$ où M est une constnate bien choisie.
2. Prouver l'existence et l'unicité d'un réel $\theta_x \in]0,1[$ tel que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{(1+x\theta_x)^2}$.
3. Exprimer $x\theta_x$ en fonction de x et en déduire la limite de θ_x quand x tend vers $0+$.

36 — *Indiscernabilité à l'ordre 6 de $f \circ g$ et $g \circ f$* ff

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires et de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que $f'(0) = g'(0) = 1$. Étudier au voisinage de 0 :

$$\frac{f\big(g(x)\big) - g\big(f(x)\big)}{x^6}$$

37 — Formule de Taylor-Lagrange ff

Soit $n \in \mathbb{N}$, I un vrai intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $n+1$ fois dérivable sur I. On considère x_0 et x dans I.

Montrer qu'il existe c entre x_0 et x tel que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

On proposera deux démonstrations, en introduisant une fonction auxiliaire de I dans dans $\mathbb{R}$ de la forme :

1. $t \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \mathrm{M}\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ où M est une constante bien choisie.
2. $t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k - \mathrm{M}\frac{(t-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ où M est une constante bien choisie.

38 — Fonctions à dérivées uniformément dominées selon n ff

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant |x|$.

Démontrer que $f = 0$.

39 — Inégalité de Hadamard fff

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle f, f' et f'' soient bornées. Pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, on pose $\mathrm{M}_k := \left\| f^{(k)} \right\|_\infty$.

1. Démontrer l'inégalité demandée dans le cas où $\mathrm{M}_0 = 0$ ou $\mathrm{M}_2 = 0$. Dans la suite de l'énoncé on supposera M_0 et M_2 strictement positifs.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Justifier que $\left|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2}$.
3. En déduire que $\forall h > 0,\ \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{2\mathrm{M}_0}{h} + \frac{\mathrm{M}_2 h}{2}$.
4. Établir que $\mathrm{M}_1 \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.

X. Indications

1

Attention aux sommes et à la composition à gauche pour les équivalents !

2

Au 5., factoriser par $\sqrt{x}$ afin de faire apparaître $u \mapsto \sqrt{1+u}$.

3

Pour développer en $+\infty$, il est souvent judicieux de factoriser une somme par son temre dominant afin de faire apparaître des expressions de la forme $1+u$ avec $u \to 0$.

4

Au 5., on pourra utiliser la formule de Taylor afin d'obtenir le $\mathrm{DL}_2(1)$ de arctan.

5

Au 2., il faut développer la tangente à l'ordre trois.

6

Factoriser par $\sqrt{x}$ dans l'expression.

7

On trouve $u_n = e - \dfrac{e}{2n} + \dfrac{11e}{24n^2} - \dfrac{5e}{16n^3} + \dfrac{2447e}{5760n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

8

Utiliser les croissances comparées.

9

On trouve $n \leqslant 2$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ avec $n \geqslant 3$.

10

La fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On trouve $f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + \dfrac{5}{2}x^5 + o\left(x^5\right)$.

11

Reconnaître une somme géométrique.

12

Factoriser par n dans les logarithmes.

13

On trouve $\frac{1}{6}$.

14

On trouve que l'expression tend vers $\sqrt[3]{abc}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

15

La suite converge vers $e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{24}}$. Utiliser des DL pour lever les formes indéterminées.

16

Appliquer – par exemple – le théorème d'intégration terme à terme des DL.

17

Développer à l'ordre trois l'exponentielle en 0.

18

La réponse est négative au 1.

19

On trouve $f(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{e} + \dfrac{2e}{3}x^2 + o\left(x^2\right)$.

20

Attention, on résout toujours une équation différentielle sur un intervalle, puis on se pose la question d'un éventuel raccord.

21

Au 1., on montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par un encadrement. Une IPP permet de conclure que

$$u_n = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puis reprendre l'IPP du 1 et appliquer à f' le 1. On trouve $u_n = \dfrac{f(1)}{n} - \dfrac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

22

Exploiter le DL $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.

23

Appliquer une formule de Taylor à l'ordre un.

24

Au 3., remarquer que $x_n = 1 + o(1)$.

25

Commencer par vérifier que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

26

Appliquer les méthodes du cours : corollaire du TVI pour le 1.

27

On trouve $x_n = \pi - \dfrac{\pi}{n} + \dfrac{\pi}{n^2} + \dfrac{\mu}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

28

On trouve $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

29

On trouve $x_n \sim \ln n$.

30

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Utiliser la méthode du cours fondée sur Cesàro.

31

On prouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n$ par une récurrence facile.

32

Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre deux. Comme le titre l'indique, on trouve $f''(x_0)$.

33

Appliquer à f la formule de Taylor-Young à l'ordre deux au voisinage de 0.

34

Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre m en a.

35

Choisir M de sorte que la fonction auxiliaire proposée s'annule en x. Appliquer ensuite le théorème de Rolle à deux reprises.

36

Partir d'un $\mathrm{DL}_6(0)$ des deus fonctions.

37

On peut supposer que $x \neq x_0$ et choisir à chaque fois M telle que la fonction auxiliaire s'annule en x.

38

Que dire des dérivées de f en 0 ?

39

Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au b).