



Après avoir passé en revue les propriétés de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, nous poursuivons par l'étude des suites numériques, qui sont des outils fondamentaux en Analyse réelle.



Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte, Seurat

2	Suites de nombres réels	1
1	Suites à valeurs réelles	3
2	Convergence et divergence	4
2.1	Opérations sur les suites convergentes	4
2.2	Divergence vers un infini	4
2.3	Convergence et relation d'ordre	6
2.4	Suites extraites	6
3	Les théorèmes de convergence	8
3.1	Le théorème d'encadrement	8
3.2	Le théorème de la limite monotone	9
3.3	Combinaisons linéaires convexes et théorème de Cesàro	10
4	Suites récurrentes d'ordre un	11
4.1	Suites arithmético-géométriques et Cie	11
4.2	Existence et représentation graphique	12
4.3	Étude de la monotonie	13
4.4	Comportement asymptotique	14
5	Suites définies implicitement	17
6	Relations de comparaison des suites numériques	19
6.1	La négligeabilité	19
6.2	L'équivalence	21
6.3	La domination	23
6.4	Le principe du calcul asymptotique	23
7	Tests	26
8	Solutions	28

L'IDÉE de suite est présente dès l'Antiquité dans l'histoire des mathématiques. Il faut cependant attendre la fin du XIX^e siècle pour voir émerger la définition actuelle, proposée par Giuseppe Peano, d'une suite comme fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

L'intérêt des savants pour les séquences de nombres découle principalement du calcul approché. Nous avons vu apparaître des suites de nombres rationnels dans le chapitre sur les nombres réels, et en particulier dans le paragraphe sur la façon d'obtenir les décimales d'un nombre.

Archimède est l'un des premiers à utiliser des suites pour résoudre des problèmes de *quadrature*, ce dernier terme signifiant la construction d'un carré de même aire qu'une surface donnée¹. Aujourd'hui, il faut tout simplement entendre par là le calcul de l'aire de la surface en question.

Archimède développe une méthode dite d'*exhaustion*, qui consiste, pour calculer une telle aire, à encadrer la surface entre deux autres dont la différence des aires est aussi petite que l'on veut. Dans son *De la quadrature de la parabole*, il établit par exemple la proposition suivante :

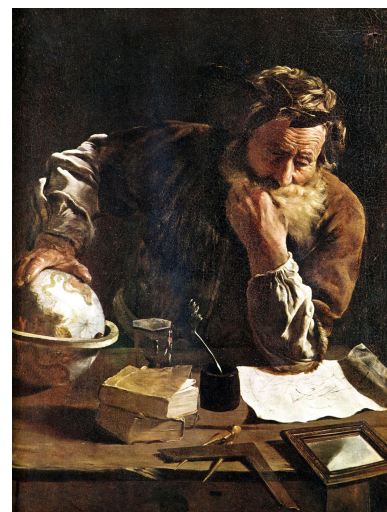
« un segment quelconque compris par une droite et une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment. »

Pour ce faire il est amené à travailler avec une suite géométrique de raison 1/4, dont il doit sommer les termes, en évitant toutefois la somme infinie et en se contentant de manipuler la suite des sommes finies.

Un autre exemple dû à Archimède est son calcul approché de π par la méthode dite des *isopérimètres*, consistant à approcher le périmètre d'un cercle par deux suites adjacentes de périmètres, obtenues, pour l'une, par des polygones réguliers inscrits et, pour l'autre, par des polygones réguliers circonscrits, dont il fait croître le nombre de côtés.

Il obtient ainsi l'encadrement suivant :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$



Archimède



Léonard de Pise, dit Fibonacci

Une autre suite célèbre dans l'histoire est celle de Fibonacci, prototype d'un système dynamique discret et modélisant la reproduction des lapins. À l'instant initial $n = 0$ nous avons un couple de lapins nouveau-nés qui ne pourra se reproduire qu'à partir de l'âge de deux mois (ie $n = 2$, l'unité de temps est le mois) pour donner alors chaque mois un autre couple de lapins, chacun de ces couples de lapins se reproduisant selon le même schéma. Si on note u_n le nombre de couples de lapins à l'instant n , on a alors $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 1 = 2$ et de manière générale (en supposant l'absence de mortalité),

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Le comportement de cette suite (dite suite de Fibonacci) lorsque n devient grand est alors gouverné par le mythique *nombre d'or*

$$\phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1. Par exemple, l'aire d'un disque.

1. Suites à valeurs réelles

Ce paragraphe d'ouverture a pour objet de mettre en place le vocabulaire sur les suites et de rappeler quelques notations classiques. Le lecteur est renvoyé au chapitre AN 1 sur les nombres réels et plus particulièrement à la section consacrée aux suites de nombres réels pour le vocabulaire de base. Nous ajouterons ici quelques définitions liées à la relation d'ordre $\leq$.

Définition 2.0. Suites monotones, suites majorées, etc. (2.1)

Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite :

⇒ croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$;

⇒ décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$;

⇒ minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$;

⇒ majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;

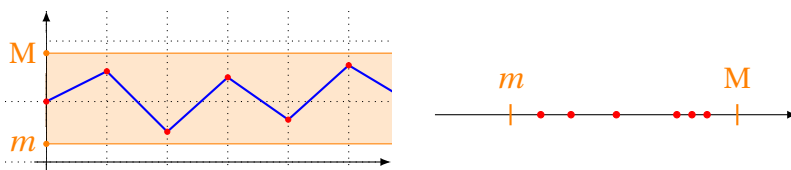
⇒ bornée si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k$
(valable pour $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$);

Comme pour les fonctions, une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée *si et seulement si* elle est majorée et minorée.

Par exemple, la suite de terme général $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est bornée et décroissante comme la relation suivante en témoigne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Une suite est bornée *si et seulement si* ses termes appartiennent à un segment $[m, M]$, i.e. son graphe est contenu dans une bande horizontale.



Transmutation des hypothèses par passage à l'opposé ou l'inverse

Pour une suite $u := (u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels :

⇒ u croissante équivaut à $-u$ décroissante, u est majorée équivaut à $-u$ minorée.

⇒ Dans le cas où u est à termes strictement positifs, u est croissante équivaut à $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ décroissante, f majorée équivaut à $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq 0}$ minorée.

Ces propriétés élémentaires permettent d'optimiser certaines démonstrations en ramenant l'étude d'un cas à un autre déjà étudié.

Définition 2.1. Propriété vraie à partir d'un certain rang

Une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est dite vraie à partir d'un certain si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Par exemple, une suite est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

2. Convergence et divergence

Le lecteur est renvoyé au chapitre AN 1 pour la définition et l'interprétation géométrique de la convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un réel ℓ (§ 2.2.) :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

2.1. Opérations sur les suites convergentes

Nous commençons par un lemme qui nous sera utile un peu plus loin.

Lemme 2.2.

Une suite convergente est bornée.

La réciproque est fautive comme l'illustre le contre-exemple $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans la pratique, on ne revient à la définition *epsilon* qu'en dernier recours; il est préférable d'utiliser par exemple le théorème concernant les opérations sur les suites convergentes.

Proposition 2.3. Opérations sur les suites convergentes

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$, alors $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 + \ell_2$ et $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \ell_2$.

Si de plus $\ell_1 \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell_1}$ et $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_2}{\ell_1}$.

On obtient, par une récurrence immédiate, des résultats analogues pour des opérations sur un nombre fini de suites.

2.2. Divergence vers un infini

Nous allons étudier un cas particulier de divergence, celui des suites admettant une limite infinie.

Définition 2.4. Divergence vers $\pm\infty$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

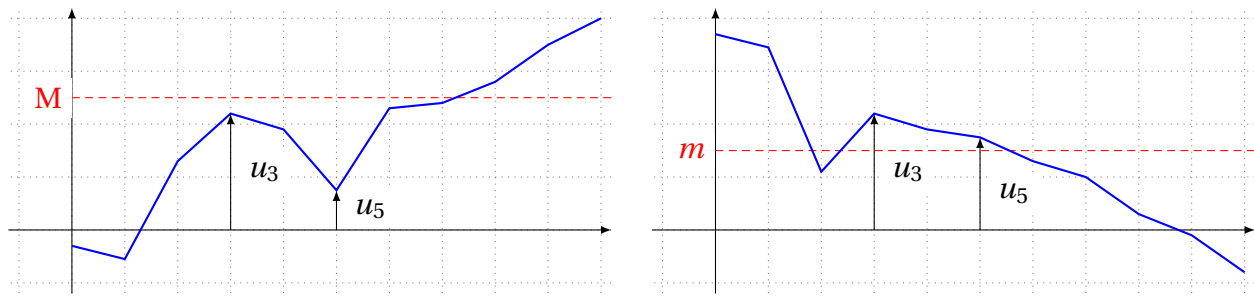
$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$; on note $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

$\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq m$; on note $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

✗ Démontrons par exemple que $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. La condition $\sqrt{n} \geq M$ équivaut à $n \geq M^2$. Posons $n_0 := \lfloor M^2 \rfloor + 1$. Pour un entier n vérifiant $n \geq n_0$, on a que $n^2 \geq n_0^2 \geq M^2$. La définition de la divergence vers $+\infty$ a bien été vérifiée :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sqrt{n} \geq M$$

Interprétations géométriques de la divergence vers $\pm\infty$



✕ Passons à présent au cas de la suite géométrique $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $r > 1$.

- ✓ En posant $\varepsilon := r - 1$, on a $r = 1 + \varepsilon$. On remarque que $\varepsilon > 0$. Fixons M dans $\mathbb{R}_+$ et n dans $\mathbb{N}$, on cherche une condition suffisante de la forme $n \geq n_0$ pour que

$$(1 + \varepsilon)^n \geq M$$

- ✓ La formule du binôme peut nous y aider. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1 + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq 1 + n\varepsilon$$

car la somme de ces $n + 1$ termes positifs est supérieure à celle des deux premiers termes). Il suffit donc d'avoir $1 + n\varepsilon \geq M$ pour en conclure que $(1 + \varepsilon)^n \geq M$. En posant $n_0 := \max\left(0, \left\lfloor \frac{M-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right)$, on a donc bien $(1 + \varepsilon)^n \geq M$ lorsque $n \geq n_0$.

- ✓ Au passage, le « 0 » dans le maximum définissant n_0 sert à assurer que n_0 est un entier naturel. Nous avons bien démontré que :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 + \varepsilon)^n \geq M$$

L'étude des opérations sur les suites admettant une limite infinie fait apparaître des *formes indéterminées* (FI), ie des cas où ne peut conclure en général, il faut faire une étude au cas par cas (**2.3**)

Proposition 2.5. Opérations sur les limites

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2$, alors :

- a. le comportement asymptotique de $u_n + v_n$ est décrit par le tableau suivant

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

- b. Si $\ell_1 = 0$ et que u_n est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang, alors $1/u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

- c. le comportement asymptotique de $u_n v_n$ est décrit par le tableau suivant

	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	FI	FI
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

2.3. Convergence et relation d'ordre

Un argument revient régulièrement dans les démonstrations d'analyse : le passage à la limite dans une égalité. Considérons deux suites de nombres réels de termes généraux u_n et v_n , supposées convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 . Si $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell_1 = \ell_2$. C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la limite. Ce résultat admet une généralisation : le passage à la limite dans une inégalité.

Proposition 2.6. Passage à la limite dans une inégalité

Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux nombres réels. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et telles que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

En particulier s'il existe $(m, \ell) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geq m$. On prendra garde à ce qu'un passage à la limite dans une inégalité asymptotique se solde toujours par une inégalité *au sens large* : si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors on ne peut en conclure que $\ell_1 < \ell_2$, comme l'illustre l'inégalité $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudions à présent la problématique *inverse* : quelles inégalités asymptotiques (i.e. valables à partir d'un certain rang) peut-on déduire de la limite d'une suite ?

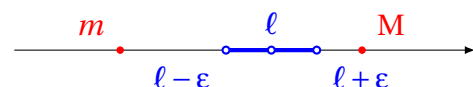
Proposition 2.7. Inégalités asymptotiques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m < \ell < M$, on a $m < u_n < M$ à partir d'un certain rang.

Ce résultat est géométriquement clair. Dans la définition de la convergence, il suffit de choisir ε de la façon suivante :

$$m < \ell - \varepsilon < \ell + \varepsilon < M$$



2.4. Suites extraites

Nous allons à présent formaliser le choix d'un nombre infini de termes d'une suite donnée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en la balayant dans le sens des indices croissants :

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, \dots$$

On peut ranger ces termes dans une *nouvelle suite* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 := u_1, v_1 := u_2, v_2 := u_5, v_3 := u_8, v_4 := u_9$, etc.

Définition 2.8. Suites extraites

On appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Dans l'exemple précédent, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec, pour tout entier naturel n , $v_n = u_{\phi(n)}$ où $\phi(0) := 1, \phi(1) := 2, \phi(2) := 5, \phi(3) := 8, \phi(4) := 9$, etc. Le lecteur vérifiera sa compréhension au moyen des tests (2.4) et (2.5).

La notion de suite extraite est un précieux outil pour étudier la dynamique d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée.

Lemme 2.9. Fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Si $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) \geq n$.

Proposition 2.10. Suites extraites d'une suite convergente

Toute suite extraite d'une suite admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ admet la même limite ℓ .

On remarquera que la réciproque de ce théorème est fautive, une suite extraite pouvant ne donner qu'un *renseignement partiel* sur la suite d'origine². Cette proposition est un outil commode pour établir qu'une suite n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, la suite de terme général $u_n := (-1)^n$ diverge car ses deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes mais de limites différentes.

Comment démontrer qu'une suite n'a pas de limite ?

Pour établir qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune limite, il suffit d'exhiber une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admettant aucune limite ou encore de trouver deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettant des limites distinctes.

✗ La suite de terme général $u_n := \cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2n\pi}{3}\right)$ est divergente. En effet :

$$u_{3n} = \cos\left(\frac{\pi}{3n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad u_{3n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3n+1} + \frac{2\pi}{3}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Le théorème précédent admet une réciproque partielle.

Proposition 2.11. Extraction des indices pairs et des indices impairs

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

Les suites extraites permettent de caractériser simplement les suites non majorées ou non minorées.

2. Cela dépend bien-sûr des indices extraits.

Proposition 2.12. Caractérisation des suites non majorées

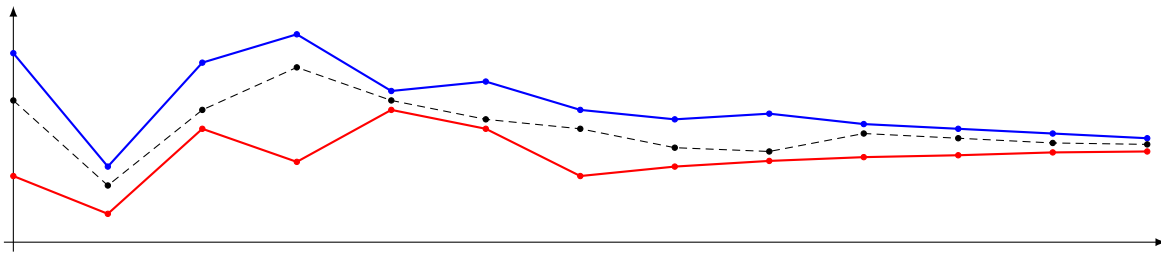
Une suite est non majorée si et seulement si elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

3. Les théorèmes de convergence

Dans cette section, nous étudions quelques conditions suffisantes d'existence d'une limite. Nous dégagerons trois grands types d'hypothèses : la monotonie, des encadrements et l'écriture sous forme d'une moyenne pondérée.

3.1. Le théorème d'encadrement

Le résultat suivant est parfois appelé *théorème des gendarmes* ou encore *théorème du sandwich*. Son interprétation géométrique est limpide.



Théorème 2.13. Théorème d'encadrement

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et telles que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et telles que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et telles que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.

On déduit immédiatement du théorème d'encadrement la stratégie suivante : pour démontrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, on cherche une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.

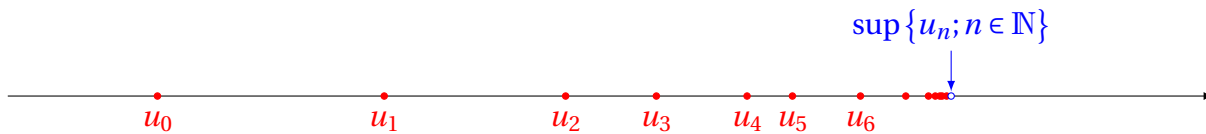
✕ Montrons par exemple que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

car le plus grand terme de la somme est celui d'indice $k = 1$. Comme $\frac{n}{n^2 + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, le théorème d'encadrement permet bien de conclure.

3.2. Le théorème de la limite monotone

D'un point de vue intuitif, une suite croissante et majorée converge vers la borne supérieure de $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ (et une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$) :



Théorème 2.14. Théorème de la limite monotone

Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante, alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

- a. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers un réel ℓ .
- b. Si (u_n) n'est pas majorée, (u_n) diverge vers $+\infty$.

On adapte sans peine ce résultat au cas d'une suite décroissante.

✕ Étudions par exemple la suite définie par

$$u_0 > 1, u_1 > 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{2}$$

On démontre par une récurrence facile que tous les termes de cette suite sont strictement plus grand que 1. Pour un entier n , on a

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + u_n^2}{2} = \frac{(u_{n+1} - 1)^2 + u_n^2 - 1}{2} > 0$$

Ainsi $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante à partir du rang 1 et admet donc une limite ℓ dans $]1, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell \in]1, +\infty[$. En passant à la limite dans la relation de récurrence et en utilisant les opérations sur les limites, on obtient

$$\ell = \frac{\ell^2 + \ell^2}{2} = \ell^2$$

et donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui est absurde. On a donc établi que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Le théorème de la limite monotone admet une variante aux applications intéressantes.

Définition 2.15. Suites adjacentes (2.6)

Deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont dites adjacentes si elles sont monotones de sens de variation contraires avec $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

✕ Considérons par exemple, les deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n := u_n + \frac{1}{n!}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement strictement croissante et pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

Ainsi, ces deux suites sont adjacentes à partir du rang un.

Théorème 2.16. Théorème des suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ adjacentes.

- $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont convergentes de même limite ℓ .
- Si $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont respectivement croissante et décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$.

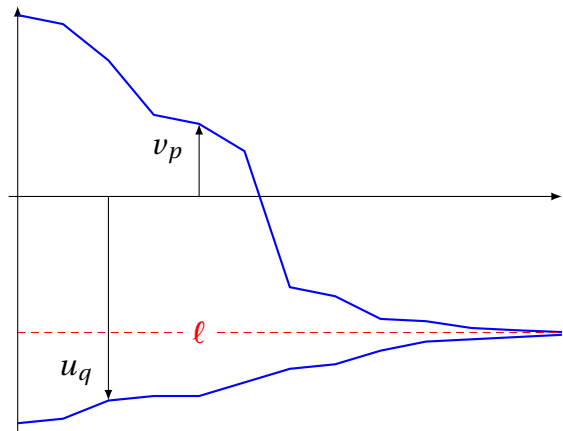
Ces dernières inégalités sont strictes dans le cas où les monotonies le sont également.

La « géométrie » d'un couple de suites adjacentes est celle d'un entonnoir.

Pour calculer des valeurs approchées d'un nombre réels x (par défaut ou par excès), il est intéressant de disposer d'une paire de suites adjacentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite x . Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement strictement croissante et décroissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < x < v_n$$

Pour tout indice n , u_n (resp. v_n) est une valeur approchée par défaut (resp. par excès) de x à $(v_n - u_n)$ -près.



✗ Notons ℓ leur limite commune des suites adjacentes $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies ci-dessus. On remarque que $7! = 5040 > 10^3$ et

$$u_7 = \frac{7! + 7! + 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 7 \times 6 \times 5 \times 4 + 7 \times 6 \times 5 + 7 \times 6 + 7 + 1}{7!} = \frac{13700}{5040} = 2,71 \dots$$

avec deux décimales exactes. Comme u_7 est une valeur par défaut à 10^{-3} -près de ℓ dont le chiffre des centièmes est non nul, on sait que $\ell = 2,71 \dots$ avec deux décimales exactes. En fait, nous démontrerons que $\ell = e$ dans la suite du cours d'analyse. Ces encadrements de ℓ au moyen de la paire de suite adjacentes permettent également d'établir l'irrationalité de ℓ par l'absurde. Supposons l'existence de (p, q) , couple d'entiers naturels non nuls, tels que $\ell = \frac{p}{q}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $qu_n < p < qv_n$, d'où en multipliant par $n!$,

$$qn!u_n < pn! < qn!v_n + 1$$

Comme $qn!u_n$ et $pn!$ sont des entiers, on en déduit une absurdité.

3.3. Combinaisons linéaires convexes et théorème de Césàro

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la moyenne arithmétique de n nombres réels $x_1, \dots, x_n$ vérifie

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \max(x_1, \dots, x_n)$$

Si les x_i sont des valeurs approchées à ε -près d'un réel λ , alors il en sera donc de même de leur moyenne arithmétique $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Cette propriété admet une version asymptotique connue sous le nom de théorème de Césàro.

Théorème 2.17. de Cesàro

Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

✗ Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on déduit de ce théorème que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

✗ La réciproque du théorème de Césàro est fausse :

la suite de terme général $u_n := (-1)^n$ diverge mais $\frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On peut généraliser ce théorème en introduisant des *poids* pour calculer la moyenne des termes $u_1, \dots, u_n$. Sous les hypothèses $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $p_1 + \dots + p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on peut conclure que

$$\frac{p_1 u_1 + \dots + p_n u_n}{p_1 + \dots + p_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

en adaptant la démonstration.

4. Suites récurrentes d'ordre un

Ce paragraphe est consacré à l'étude des suites réelles définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est fonction ne dépendant pas de n . Nous commencerons par le cas des suites arithmético-géométrique où il est possible d'expliciter en fonction de n le terme général de la suite.

4.1. Suites arithmético-géométriques et Cie**Définition 2.18. Suites arithmétiques, suites géométriques**

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) est dite :

⇒ arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$;

⇒ géométrique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r u_n$;

⇒ arithmético-géométrique si $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$.

On remarquera que les suites arithmético-géométriques généralisent les suites géométriques et arithmétiques.

Suites arithmétiques, géométriques ou arithmético-géométriques

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il y a équivalence entre a. et b., et entre c. et d. :

a. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r ;

c. (u_n) est géométrique de raison r ;

b. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n u_0$.

Le lecteur s'entraînera via les test (❗ 2.7) et (❗ 2.8)

Proposition 2.18. Comportement asymptotique d'une suite géométrique

Si $r \in]-1, 1[$, alors $r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Si $r > 1$, $r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Si $r < -1$, (r^n) n'admet aucune limite.

Calcul d'une suite arithmético-géométrique pour $a \neq 1$ (§ 2.9)

L'équation $\ell = a\ell + b$ admet une unique solution. On écrit alors $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$ et l'on forme la différence des deux lignes pour obtenir $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$. La suite $(u_n - \ell)$ est donc géométrique. On peut ainsi la calculer puis exprimer u_n en fonction de n, a, b et u_0 .

Dans le cas où $a = 1$, on retrouve la définition d'une suite arithmétique, déjà traité ci-dessus.

✗ Considérons par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n^2$. On démontre par une récurrence facile que $u_n > 0$ pour indice n dans $\mathbb{N}$. Cette suite n'est pas arithmético-géométrique mais on peut *linéariser* cette relation de récurrence via un passage au logarithme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln u_{n+1} = 2 \ln u_n + \ln 2$$

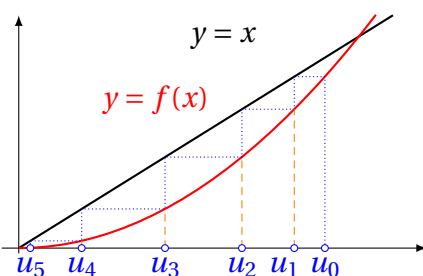
L'unique solution de $x = 2x + \ln 2$ vaut $\ell := -\ln 2$ et on déduit que la suite de terme général $u_n + \ln 2$ est géométrique de raison 2 d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln u_n = -\ln 2 + 2^n (\ln u_0 + \ln 2) \text{ et } u_n = 2^{2^n - 1} u_0^{2^n}$$

4.2. Existence et représentation graphique

Il s'agit d'étudier les suites définie par $u_0 \in \mathcal{D}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée au minimum continue. Il est éclairant de commencer par une étude graphique.

Étude graphique d'une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$



⇒ On commence par tracer sur la même figure que le graphe de la fonction f l'escalier d'itération issu de la condition initiale u_0 . Selon la position de u_0 , on pourra trouver des comportements très différents.

⇒ On émet une conjecture sur le comportement de la suite. **ATTENTION** : le comportement de certaines suites peut s'avérer très sensible aux erreurs d'arrondis, il faudra donc être très prudent dans l'interprétation de la figure...

✗ Considérons par exemple la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$ n'est définie que sur $] -\infty, 1]$.

✓ Pour $u_0 < 0$, on peut calculer $u_1 := f(u_0)$. Comme $u_1 > 1$, $f(u_1)$ n'est pas définie : on ne peut appliquer la relation de récurrence qu'une seule fois.

- ✓ Pour $u_0 \in [0, 1]$, on peut calculer $f(u_0)$ et on a $u_1 := f(u_0) \in [0, 1]$ et ainsi de suite : on peut appliquer à l'infini la relation de récurrence à partir de $u_0 \in [0, 1]$ et la suite ainsi définie est à valeurs dans $[0, 1]$.

Dans certains cas, la suite n'est pas définie pour certaines valeurs de u_0 . C'est le cas lorsque u_0 n'appartient pas à l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f . Mais si $u_0 \in \mathcal{D}$, il est possible que $f(u_0) \notin \mathcal{D}$ et ainsi de suite : il est envisageable que l'on ne puisse plus mener à bien le calcul des termes après un nombre fini d'itération(s). Dans l'exemple ci-dessus, c'est la stabilité de $I := [0, 1]$ par f , ie la relation $f(I) \subset I$ qui permet d'itérer à l'infini la relation de récurrence à partir de u_0 . C'est un des théorèmes de la théorie des ensembles qui formalise ce résultat.

Proposition 2.19.

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et S un intervalle de $\mathcal{D}$ stable par f . Pour $a \in S$, il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 := a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f^n(u_0)$ où $f^n = f \circ \dots \circ f$ (itérée n -ème) de f et est à valeurs dans S .

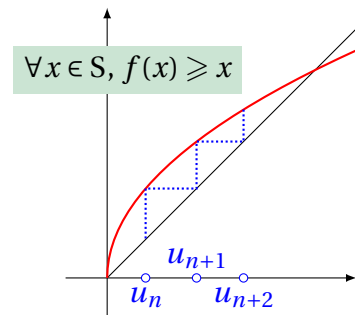
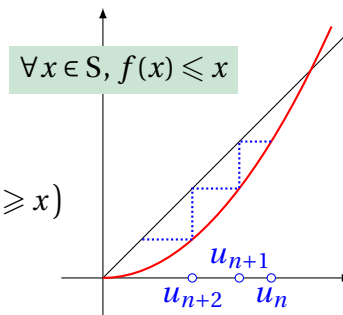
4.3. Étude de la monotonie

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et S un intervalle de $\mathcal{D}$ stable par f . Considérons $u_0 \in S$ et la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n . On sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeur dans S . Comparer u_{n+1} à u_n pour un entier naturel n fixé revient à positionner $f(u_n)$ par rapport à u_n . On dégage deux grands types d'hypothèses permettant de conclure à la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le graphe de f est en-dessous (ou au-dessus) de la première bissectrice sur S

C'est-à-dire

$$(\forall x \in S, f(x) \leq x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in S, f(x) \geq x)$$



- ✕ Cas 1 : $\forall x \in S, f(x) \leq x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in S$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- ✕ Cas 2 : $\forall x \in S, f(x) \geq x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in S$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

La fonction f est croissante sur S

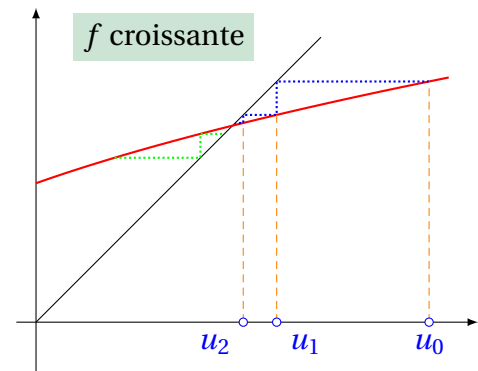
Sous cette hypothèse, en dessinant un peu, on conjecture que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, croissante ou décroissante selon la position des deux premiers termes $u_0 \leq u_1$ ou $u_1 \leq u_0$, ie que les itérations démarrent au-dessus ou en-dessous de la bissectrice.

✗ Cas 1 : $u_0 \leq u_1$. Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$ par récurrence.

✓ Comme $u_0 \leq u_1$, l'hypothèse est vraie au rang 0.

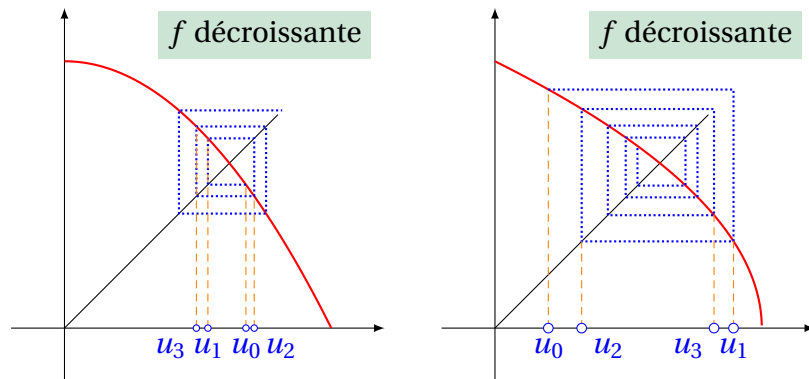
✓ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. Comme u_n et u_{n+1} appartiennent à S et f est croissante sur S , on en déduit que $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, ie $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ d'où la propriété au rang $n+1$.

✗ Cas 2 : $u_1 \leq u_0$. On démontre par une récurrence analogue que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.



La fonction f est décroissante sur S

Dans ce cas, la dynamique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est plus complexe. On conjecture que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires. Leur sens de variation dépendant de la position relative des deux premiers termes u_0 et u_1 , ie du fait que $f(u_0) \geq u_0$ ou $f(u_0) \leq u_0$.



✗ Le point essentiel est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = (f \circ f)(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = (f \circ f)(u_{2n+1})$$

✗ Ainsi, en notant $g := f \circ f$, $v_n := u_{2n}$ et $w_n := u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = g(w_n)$$

Les deux suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence, elles ne diffèrent que par leurs premiers termes $v_0 = u_0$ et $w_0 = u_1$.

✓ La partie S étant stable par f , elle l'est aussi par $g = f \circ f$.

✓ La fonction g est croissante sur S . En effet, soit x et y dans S tels que $x \leq y$. Comme f est décroissante sur S , on a $f(x) \geq f(y)$. Puisque S est stable par f , on a que $f(x)$ et $f(y)$ appartiennent à S donc, à nouveau par décroissance de f sur S , on en conclut que $(f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(y)$, ie $g(x) \leq g(y)$.

✓ Comme u_0 et u_1 appartiennent à f , on déduit de l'étude précédente que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

✓ Supposons par exemple que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme g est décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On démontre de même que si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, alors $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4.4. Comportement asymptotique

En examinant les différents graphiques tracés précédemment, on conjecture que la limite d'une suite récurrence associée à f est nécessairement un point fixe de f , ie une abscisse où le graphe de f et la première bissectrice s'intersectent.

Proposition 2.20.

Soit $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et S un intervalle de $\mathcal{D}$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in S \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

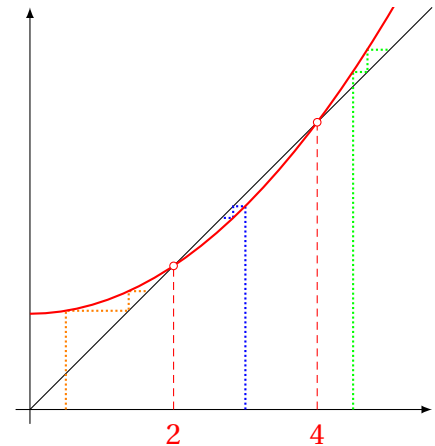
Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ où $\ell \in S$, alors $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de f .

✕ Étudions la dynamique de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6}$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

Nous commençons par tracer avec soin le graphe de f et la première bissectrice du repère.

On conjecture alors que le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend de son premier terme u_0 :

- ⇒ strictement croissante de limite $+\infty$ si $u_0 > 4$;
- ⇒ strictement décroissante de limite 2 si $2 < u_0 < 4$;
- ⇒ strictement croissante de limite 2 si $0 \leq u_0 < 2$;
- ⇒ constante si $u_0 = 2$ ou $u_0 = 4$.



✓ On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{6}$ et l'on complète les tableaux suivants :

x	0	2	4	$+\infty$	
$f(x) - x$	+	0	-	0	+

x	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	2	4	$+\infty$

- ✓ Remarquons que f étant continue, les limites réelles potentielles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des points fixes de f , i.e. 2 ou 4.
- ✓ Il est clair que si u_0 est l'un des deux points fixes de f , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- ✓ Étudions le cas où $u_0 \in]2, 4[$.
 - ✦ L'intervalle $]2, 4[$ est stable par f et $f(x) - x < 0$ pour x dans cet intervalle (cf. les deux tableaux), on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $]2, 4[$ et strictement décroissante.
 - ✦ Elle converge donc vers un réel ℓ par le théorème de la limite monotone. On a $\ell \neq 4$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et $u_0 < 4$. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.
- ✓ Supposons à présent que $u_0 \in [0, 2[$.
 - ✦ L'intervalle $[0, 2[$ est stable par f et $f(x) - x > 0$ pour x dans cet intervalle (cf. les deux tableaux), on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 2[$ et strictement croissante.
 - ✦ Elle converge donc vers un réel ℓ par le théorème de la limite monotone. On a $\ell \neq 4$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 2. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

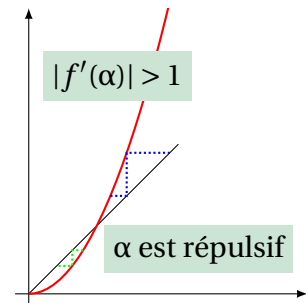
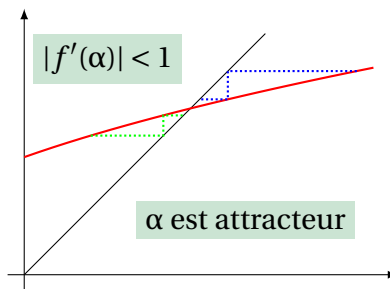
✓ Terminons par le cas $u_0 > 4$.

- ✦ L'intervalle $]4, +\infty[$ est stable par f et $f(x) - x > 0$ pour x dans cet intervalle (cf. les deux tableaux), on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $]4, +\infty[$ et strictement croissante.
- ✦ Elle n'est pas convergente car $[u_0, +\infty[$ ne contient aucun point fixe de f . On déduit du théorème de la limite monotone que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La manière dont la courbe traverse la première bissectrice en un point fixe conditionne le comportement de la suite pour une condition initiale u_0 au voisinage de ce point fixe. Dans le cas où f est dérivable en l'un de ses points fixes α :

Si $|f'(\alpha)| < 1$, alors α est dit *attracteur* : pour toute condition initiale au voisinage de α , la suite converge vers α .

Si $|f'(\alpha)| > 1$, alors α est dit *répulsif* : pour toute condition initiale au voisinage de α mais distincte de α , la suite a tendance à s'éloigner de α .



Ces résultats seront justifiés un peu plus tard. Nous verrons dans le chapitre sur la dérivation que l'inégalité des accroissements finis permet parfois de conclure très vite.

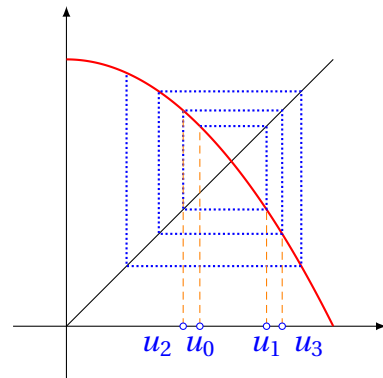
✕ Continuons par l'étude de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Nous commençons par tracer avec soin le graphe de $f : x \mapsto 1 - x^2$ et la première bissectrice du repère.

On conjecture alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, et plus précisément :

⇒ $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant (vers 0 ?) ;

⇒ $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant (vers 1 ?).



✓ Le segment $[0, 1]$ étant stable par f , la suite est à valeur dans $[0, 1]$.

✓ Comme f est décroissante sur $[0, 1]$, on déduit de la section précédente que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, de sens de variation contraires.

✓ On a $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{7}{16}$. Puisque $u_2 < u_0$, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante.

✓ Puisque ces deux suites sont à valeurs dans $[0, 1]$, on déduit du théorème de la limite monotone qu'elles convergent respectivement vers des réels ℓ_0 et ℓ_1 .

✓ Ces deux suites vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = g(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = g(u_{2n+1}) \quad \text{où} \quad g := f \circ f \text{ est continue}$$

Leurs limites ℓ_0 et ℓ_1 sont donc des points fixes de g .

✓ Pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} g(x) - x &= \left(1 - (1 - x^2)^2\right) - x = x^2(2 - x^2) - x = x(-x^3 + 2x - 1) = x(1 - x)(x^2 + x - 1) \\ &= x(1 - x) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que ℓ_0 et ℓ_1 appartiennent à $\left\{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$. Comme

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 0 \leq \ell_0 \leq u_0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < u_1 \leq \ell_1$$

on aboutit à $\ell_0 = 0$ et $\ell_1 = 1$.

La figure de gauche (resp. de droite) du paragraphe sur le cas où f est décroissante (cf. page 14) illustre le cas d'un point fixe répulsif (resp. attracteur).

Synthèse sur l'étude des suites récurrentes (2.10)

Attention, seuls les théorèmes mentionnés ci-dessus sont au programme. En particulier, toute étude de monotonie devra être redémontrée en détail.

- ⇒ Commencer par conjecturer au moyen d'une figure est souvent un bon point de départ. Mais il faudra faire attention à la précision : une petite erreur sur la tangente en un point fixe peut transformer un point fixe attracteur en point fixe répulsif (ou l'inverse).
- ⇒ La démonstration commence toujours par la détermination d'un intervalle stable qui est au fondement de l'étude qualitative de la dynamique de la suite.

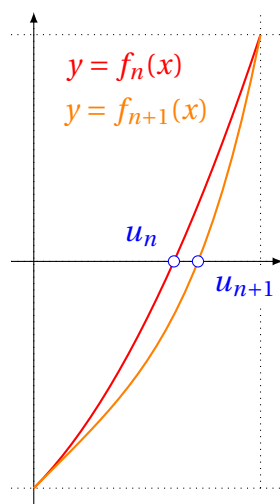
5. Suites définies implicitement

Il s'agit des suites (u_n) dont le terme général est défini comme solution d'une équation $f_n(x) = 0$.

✕ Considérons par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n^n + u_n - 1 = 0$ et $u_n \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- ✓ Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme des fonctions $x \mapsto x^n$ (croissante) et $x \mapsto x - 1$ (strictement croissante). De plus, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Comme f_n est continue (en tant que fonction polynomiale), on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que f_n s'annule sur $]0, 1[$ et par stricte croissance de f_n , le point où f_n s'annule est unique, on le note u_n .

x	0	u_n	1
$f_n(x)$	-1	0	1



- ✓ On peut interpréter géométriquement la définition de la suite et conjecturer qu'elle est croissante : comme $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$, on déduit de la croissance de f_n et f_{n+1} que f_n s'annule avant f_{n+1} , i.e. $u_n \leq u_{n+1}$. La démonstration est facile : pour $x \in [0, 1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$ d'où $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. En particulier

$$0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \leq f_n(u_{n+1})$$

Comme f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ et s'annule en u_n (cf. le tableau de variation de f_n), on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante et majorée par 1, elle converge donc par le théorème de la limite monotone. Raisonnons par l'absurde en supposant que la limite ℓ de cette suite est strictement inférieure à 1. On a alors $u_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $u_n = 1 - u_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par opération sur les limites. Ainsi $\ell = 1$, ce qui est absurde.

- ✓ On peut aussi revenir à la définition de la convergence. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On a

$$f_n(1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n - \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\varepsilon < 0$$

donc $f_n(1 - \varepsilon) < 0$ à partir d'un certain rang. Comme $1 - \varepsilon \in [0, 1]$ et f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ en s'annulant en u_n , on en déduit que $1 - \varepsilon < u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang. On retrouve bien que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

- ✓ Il est souvent profitable d'écrire l'équation définissant u_n sous une forme équivalente. Dans notre cas, ceci offre une troisième voie de résolution :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln u_n}{\ln(1 - u_n)} = \frac{1}{n}$$

On note alors $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{\ln(1-x)}$. au moyen du théorème de la bijection, on peut démontrer que ϕ réalise une bijection strictement décroissante de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$. On déduit les variations de ϕ^{-1} de celles de ϕ en « inversant » le tableau de variation de ϕ :

x	0	1
$\phi(x)$	$+\infty$	0

x	0	$+\infty$
$\phi^{-1}(x)$	1	0

Ainsi l'expression $u_n = \phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ est croissante (composée de deux expressions décroissantes). Comme $\phi^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Synthèse pour l'étude d'une suite implicitement définie (§ 2.11)

- ⇒ Une étude graphique est possible.
- ⇒ Le tableau de variation de f_n est la clé de l'étude qualitative : définition, sens de variation, encadrement de u_n , etc.

⇒ On pourra, si l'on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, passer à la limite dans l'égalité $f_n(u_n) = 0$ (avec les précautions d'usage, attention aux formes indéterminées!) afin de déterminer la valeur de $\lim u_n$.

6. Relations de comparaison des suites numériques

Dans cette section, nous allons jeter les bases de l'analyse asymptotique des suites. Il s'agit essentiellement de créer des outils permettant de comparer, quand n tend vers $+\infty$, deux expressions u_n et v_n qui tendent vers $+\infty$ (resp. 0) : laquelle des deux temps *plus vite* que l'autre vers $+\infty$ (resp. 0) ? Le travail commence par la définition de trois relations binaires de comparaison asymptotique des suites (c'est-à-dire pour n tendant vers $+\infty$) qui nous permettront de lever des formes indéterminées.

6.1. La négligeabilité

Nous commençons par une formalisation mathématique de l'idée de négligeabilité.

Définition 2.21. Négligeabilité, notations o (Landau) et $\ll$ (Hardy) (§ 2.12)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \geq 0}$ si

⇒ $\exists (\epsilon_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n = v_n \epsilon_n$ à partir d'un certain rang.

⇒ On note alors $u_n = o(v_n)$ (notation de Landau qui se lit « petit ô ») ou $u_n \ll v_n$ (notation de Hardy).

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n = o(v_n)$ équivaut à $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Considérons par exemple (α, β) dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} n^\alpha \ll n^\beta &\iff \frac{n^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \left(\text{car } \frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} \right) \\ &\iff \alpha < \beta \end{aligned}$$

La notation usuelle $u_n = o(v_n)$ est abusive. Puisque les expressions $\frac{n}{n^2}$ et $\frac{\sqrt{n}}{n^2}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, on a $n = o(n^2)$ et $\sqrt{n} = o(n^2)$ mais ces deux « $o(n^2)$ » ne sont pas égaux.

Dangers de la notation $o(v_n)$

En résumé, l'égalité $u_n = o(v_n)$ n'en est pas une, il faut la comprendre comme une relation binaire. En particulier, on explicitera tout « $o(v_n)$ » avant de l'utiliser dans un calcul. On reviendra à la définition en l'écrivant sous la forme $v_n \epsilon_n$ à partir d'un certain rang avec ϵ_n qui tend vers 0.

Une manipulation raisonnée et efficace de la relation de négligeabilité nécessite l'apprentissage de quelques règles de calcul.

Proposition 2.22. Composition à droite

Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{\phi(n)} = o(v_{\phi(n)})$.

Par exemple, si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{2n} = o(v_{2n})$. C'est bien un résultat sur la composition à droite, car en écrivant toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme une fonction $f : n \mapsto f_n$, le théorème précédent s'énonce ainsi : pour tout $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de limite infinie en l'infini,

$$u = o(v) \implies u \circ \phi = o(v \circ \phi) \quad (\text{on a composé à droite } u \text{ et } v)$$

On prendra garde à la composition à gauche. Même sous des conditions simples portant sur la fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, la relation $u = o(v)$ n'entraîne pas en général que $f \circ u = o(f \circ v)$. Par exemple, $n = o(n^2)$ mais $\ln n$ n'est pas un petit $\hat{o}$ de $\ln n^2$ car $\ln n^2 = 2 \ln n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.23. Règles de calcul sur les suites négligeables

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quatre suites de nombres réels.

- | | |
|--|---|
| <p>a. $\forall \mu \in \mathbb{R}^*, v_n = o(u_n) \iff v_n = o(\mu u_n)$
(absorption des constantes multiplicatives);</p> <p>b. $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{cases} \implies u_n = o(w_n)$
(transitivité de o);</p> <p>c. $\begin{cases} t_n = o(u_n) \\ w_n = o(u_n) \end{cases} \implies t_n + w_n = o(u_n)$
(la somme de deux o est un o);</p> | <p>d. $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;</p> <p>e. $\forall \alpha > 0, u_n = o(v_n) \implies u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$;
(pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+$)</p> <p>f. $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ w_n = o(t_n) \end{cases} \implies u_n w_n = o(v_n t_n)$
(compatibilité de o avec le produit);</p> <p>g. $u_n = o(v_n) \implies u_n w_n = o(v_n w_n)$
(compatibilité de o avec le produit).</p> |
|--|---|

Le a. est une propriété de transitivité; elle permet d'écrire $u_n \ll v_n \ll w_n$ sans qu'il y ait d'ambiguïté : si $u_n \ll v_n$ et $v_n \ll w_n$, alors $u_n \ll w_n$. C'est pour ce type de raccourci que la notation de Hardy est plus intéressante que celle de Landau. Grâce à elle, on pourra écrire des *échelles de comparaison*, comme celle des puissances de n :

$$\dots \ll \frac{1}{n^3} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll 1 \ll n \ll n^2 \ll n^3 \ll \dots$$

Une propriété brille par son absence : l'addition n'est pas compatible avec la relation de négligeabilité. C'est-à-dire que

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ a_n = o(b_n) \end{cases} \quad \text{n'implique pas} \quad u_n + a_n = o(v_n + b_n)$$

Par exemple $\sqrt{n} = o(n)$ et $\sqrt{n} = o(1 - n)$ mais $2\sqrt{n} \neq o(1)$. La relation de négligeabilité permet de reformuler les croissances comparées des suites de référence.

Proposition 2.24. Croissances comparées des suites usuelles

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $|a| > 1$, on a $\ln^\beta(n) \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$.

La démonstration repose sur le lemme de comparaison géométrique ci-contre.

Lemme 2.25. Comparaison géométrique

Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0, 1[$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Le lecteur abordera avec profit les tests (❗ 2.13) et (❗ 2.14)

6.2. L'équivalence

La relation suivante formalise l'idée de deux suites ayant *le même ordre de grandeur asymptotique*.

Définition 2.26. Équivalence, notation $\sim$ de Landau (❗ 2.15)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est équivalente à $(v_n)_{n \geq 0}$ si

$\Rightarrow \exists (\delta_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_n = \delta_n v_n$ à partir d'un certain rang.

$\Rightarrow$ On note alors $u_n \sim v_n$ (notation de Landau).

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \sim v_n$ équivaut à $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On dit de deux suites équivalentes qu'elles ont « *le même ordre de grandeur* ». Un exemple typique est celui des suites polynomiales : pour $d \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $a_d \neq 0$, on a

$$a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d \sim a_d n^d$$

Car $\frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_d n^d}{a_d n^d} = 1 + \sum_{i=0}^{d-1} a_i n^{i-d} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par opérations sur les limites.

L'équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de nombres réels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (les propriétés de réflexivité et de symétrie sont évidentes).

Proposition 2.27. Règles de calcul

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quatre suites de nombres réels.

a. $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{cases} \Rightarrow u_n \sim w_n$ (transitivité de $\sim$)

b. $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$

c. Si $u_n \sim v_n$, alors

$$w_n = o(u_n) \iff w_n = o(v_n)$$

d. $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim t_n \end{cases} \Rightarrow u_n w_n \sim v_n t_n$ (compatibilité de $\sim$ avec $\times$);

e. $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n w_n \sim v_n w_n$ (compatibilité de $\sim$ avec $\times$);

f. $u_n \sim v_n \Rightarrow \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$;

g. $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim t_n \end{cases} \Rightarrow \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$.

Les propriétés d. et g. peuvent se résumer ainsi : pour calculer un équivalent d'un produit (resp. d'un quotient), il suffit de former le produit (resp. le quotient) des équivalents. Comme pour la négligeabilité, il n'existe pas de résultat de ce type pour les sommes. La relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition :

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ a_n \sim b_n \end{cases} \quad \text{n'implique pas} \quad u_n + a_n \sim v_n + b_n$$

Par exemple $n+1 \sim n+1$ et $-n+\sqrt{n} \sim -n$ mais $1+\sqrt{n} \not\sim 1$. En particulier, on ne peut ajouter membre à membre des équivalences ni faire passer un terme de gauche à droite en le transformant en son opposé (mais c'est possible pour le produit) :

$$u_n \sim v_n \quad \text{n'implique pas} \quad u_n + a_n \sim v_n + a_n \quad \Bigg| \quad u_n + a_n \sim v_n \quad \text{n'implique pas} \quad u_n \sim v_n - a_n$$

Proposition 2.28. Composition à droite dans des équivalents

Pour $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $u_n \sim v_n \implies u_{\phi(n)} \sim v_{\phi(n)}$.

Ainsi $u_n \sim v_n \implies u_{2n+1} \sim v_{2n+1}$. Comme pour la négligeabilité, il n'y a pas de résultat général sur la composition à gauche dans des équivalents, c'est-à-dire que, pour une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_n \sim v_n \quad \text{n'implique pas} \quad f(u_n) \sim f(v_n)$$

en toute généralité. Par exemple, $n+1 \sim n$ mais $e^{n+1} \not\sim e^n$ car $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e$. Il existe cependant des cas où l'on peut composer à gauche.

Proposition 2.29. Règles de composition à gauche dans des équivalents

Pour des suites positives :

- a. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour des suites positives;
- b. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$ et $u_n \sim v_n$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

On reconnaît des compositions à gauche par $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto \ln x$. Des suites convergeant vers 1 sont équivalentes mais pas nécessairement leurs logarithmes :

$$1 - \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (\text{cf. les équivalents usuels un peu plus loin})$$

Deux suites équivalentes ont des propriétés en commun.

Proposition 2.30.

Deux suites équivalentes sont du même signe à partir d'un certain rang.

En revanche, le sens de variation n'est pas conservé par équivalence. En effet, $1 - \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n}$ (car le quotient des deux expressions converge vers 1) mais l'expression de gauche est croissante alors que celle de droite décroît.

6.3. La domination

La dernière relation de comparaison, la domination, est moins importante dans un premier temps mais rend tout de même quelques précieux services³.

Définition 2.31. Domination, notation O de Landau

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est dominée par $(v_n)_{n \geq 0}$ si

$\Rightarrow \exists (b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = b_n v_n$ à partir d'un certain rang.

$\Rightarrow$ On note alors $u_n = O(v_n)$.

Si $v_n \neq 0$ APCR, alors $u_n = O(v_n)$ équivaut à $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq 0}$ est bornée.

Comme dans le cas des « petits o », il s'agit d'un abus de notation. Il ne s'agit pas d'une égalité mais d'une relation. Il est clair que $u_n = o(v_n)$ implique que $u_n = O(v_n)$ car une suite qui converge vers 0 est bornée. La réciproque est fausse, on a par exemple $2024n^2 + 1 = O(n^2)$ mais $2024n^2 \neq o(n^2)$ car l'expression $\frac{2024n^2 + 1}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 2.32. Règles de calcul

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$, $(w_n)_{n \geq 0}$ et $(t_n)_{n \geq 0}$ quatre suites de réels.

a. $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ v_n = O(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n = O(w_n)$
(transitivité de O);

b. $u_n = O(1)$ si et seulement si (u_n) est bornée;

c. $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ w_n = O(t_n) \end{cases} \Rightarrow u_n w_n = O(v_n t_n)$
(compatibilité de O avec $\times$);

d. $u_n = O(v_n) \Rightarrow u_n w_n = O(v_n w_n)$
(compatibilité de O avec $\times$).

6.4. Le principe du calcul asymptotique

Au delà du signe, une autre propriété est conservée par équivalence : l'existence et la valeur d'une limite.

Proposition 2.33. Comportement asymptotique des suites équivalentes

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Après avoir énoncé toutes les règles de calcul usuelles, nous pouvons à présent illustrer le calcul asymptotique par l'exemple des fractions rationnelles, i.e. les quotients de deux polynômes. Considérons $a_0, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ des nombres réels tels que a_p et b_q soient non nuls. On a

$$u_n := \frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \dots + b_q n^q} \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$$

par les règles de calcul sur les quotients d'équivalents. On est ramené à étudier la limite en $+\infty$ d'une expression beaucoup plus simple que le quotient initial.

3. Nous verrons son utilité dans le chapitre du cours d'analyse consacré aux séries numériques.

⇒ On en déduit que si $p > q$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \infty$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est le signe de $\frac{a_p}{b_q}$.

⇒ De même, si $q > p$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et si $p = q$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p}{b_q}$.

Ce type de calcul, qualifié d'asymptotique, est bien plus efficace que les méthodes standards.

Levée d'une forme indéterminée par des équivalents

On trouve une *chaîne d'équivalents* $a_n \sim b_n \sim \dots \sim z_n$, jusqu'à aboutir à (z_n) de comportement connu, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. On en conclut que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Dans les calculs, on aura intérêt à chercher les équivalents les plus simples possibles. Il est clair que l'équivalent le plus simple d'une suite convergente de limite non nulle est sa limite.

Proposition 2.34.

Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \sim \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Équivalents usuels

Pour $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers 0 et f dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$, on a $f(u_n) - f(0) \sim f'(0)u_n$. On en déduit les cas usuels suivants :

a. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$;

c. $\sin u_n \sim u_n$;

e. $\tan u_n \sim u_n$;

b. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$;

d. $\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$;

f. $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
(pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

Passons en revue brièvement les formes indéterminées usuelles.

Produits : formes indéterminées du type « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0 \times \infty$ » (§ 2.16)

Pour $u_n v_n$ ou $\frac{u_n}{v_n}$: rechercher des équivalents *simples* de u_n et v_n .

On a

$$u_n := \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \sim \frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De même, $v_n := e^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{e^n}{n^2}$ d'où $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

Sommes : formes indéterminées du type « $+\infty - \infty$ »

Pour une somme $u_n + v_n$, on compare u_n et v_n . Si l'un des deux termes est négligeable devant l'autre, alors on sait conclure. Sinon, il faudra développer de nouveaux outils (les développements limités, cf. les chapitres ultérieurs du cours d'analyse).

On a $\ln n - \sqrt{n} + 1 \sim -\sqrt{n}$ car $\ln n + 1 = o(\sqrt{n})$. Considérons $v_n := \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$. Ici, $\sqrt[3]{n+1} \sim \sqrt[3]{n}$, on ne peut donc pas procéder comme dans le calcul précédent. On remarque que :

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \sim n^{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$$

d'où $v_n \rightarrow 0$.

Puissances : formes indéterminées du type « 0^0 » et « 1^∞ »

Pour $u_n^{v_n}$, on écrit $u_n^{v_n} = e^{v_n \ln u_n}$ et on s'intéresse au produit $v_n \ln u_n$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $u_n := \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n$. Comme $1 + \frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a $1 + \frac{a}{n} > 0$ pour n assez grand. Ainsi,

$$\ln u_n = n \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \sim n \times \frac{a}{n} = a$$

On en déduit que $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ puis $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a$ pour continuité de l'exponentielle en a .

7. Tests

2.1.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

- a. Le produit de deux suites croissantes est une suite croissante.
- b. La produit de deux suites décroissantes est une suite décroissante.

2.2.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Peut-on en conclure que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge ?

2.3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls. Peut-on affirmer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$?

2.4.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, supposées indexées par $\mathbb{N}$, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3 \times 2^n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3 \times 2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$$

2.5.

Soit (u_n) une suite réelle et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) . Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n) .

2.6.

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

2.7.

Soit $\lambda > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + \lambda)$. Calculer u_n en fonction de n et u_0 .

2.8.

Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^3$. Calculer u_n en fonction de n et u_0 .

2.9.

Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ et $v_n = \frac{u_n}{3^n}$.

- a. Vérifier que (v_n) est arithmético-géométrique.
- b. En déduire v_n puis u_n en fonction de n . Étudier la convergence de (u_n) .

2.10.

Étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement définies par :

a. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \frac{3}{16} + u_n^2 \end{cases}$

2.11.

Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_n^n - nu_n + 1 = 0$ et $u_n \in [0, 1]$.

- Montrer que (u_n) est bien définie.
- Étudier le sens de variation de (u_n) , prouver qu'elle converge et calculer sa limite.
- Vérifier que $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ et retrouver que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2.12.

Est-il possible d'avoir $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$ pour des suites non nulles APCR ?

2.13.

Comparer $\exp(\exp n)$ et n^n .

2.14.

Déterminer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

- $2^n n^{666} e^{-n}$;
- $2^n n^{666} e^{-n/2}$;
- $2^n \sin^2(n) e^{-n}$;
- $n(\ln(n))^{-\ln(n)}$.

2.15.

Trouver une *condition nécessaire et suffisante* pour que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

2.16.

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

8. Solutions

2.1.

a. Non; cex : $(-1/n)$ et (n^2) .

b. Non; cex : $(1/n^2)$ et $(-n)$.

2.2.

Non : cex $u_n := \sqrt{n}$.

2.3.

Non; cex $((-1)^n/n)$.

2.4.

(u_{2n+1}) est extraite de (u_{2n}) , qui est extraite de (u_{2n}) ; $(u_{3 \times 2^{n+1}})$ est extraite de $(u_{3 \times 2^n})$ qui est extraite de (u_{3n}) ; $(u_{3 \times 2^{n+1}})$ est extraite de (u_{2n}) .

2.5.

Le résultat est une évidence. Formalisons : une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est de la forme $(u_{\varphi(\psi(n))}) = u_{(\varphi \circ \psi)(n)}$ avec $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Comme $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante en tant que composée d'application strictement croissante, $(u_{\varphi(\psi(n))})$ est extraite de (u_n) .

2.6.

u est croissante, et $v - u$ tend clairement vers 0. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{-n^2 - 3n - 1}{n^2(n+1)^3} < 0$$

donc v est décroissante.

2.7.

La suite de terme général $v_n = e^{u_n}$ est arithmétique de raison λ . Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(e^{u_0} + n\lambda)$$

2.8.

Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln u_{n+1} = 3 \ln u_n$. Ainsi, $\ln u_n = 3^n \ln u_0$ puis $u_n = u_0^{3^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.9.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} v_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique.

b. Classiquement :

$$v_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n (v_0 - 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

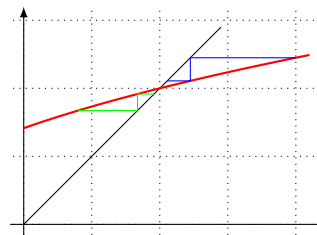
On déduit de ce qui précède que $u_n = 3^n v_n = 3^n - 2^n$ et donc

$$u_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

2.10.

a. On applique la méthode vue en cours.

$\Rightarrow$ Une figure.



On conjecture que la suite converge vers 2. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{2+x}$. On prouve sans peine que 2 est le seul point fixe de f .

$\Rightarrow$ Définition de la suite.

Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, la suite est définie pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

⇒ *Monotonie de la suite.*

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, intervalle stable par f .

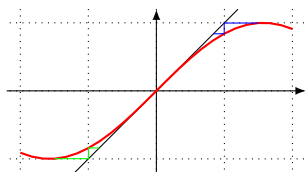
☞ Si $u_0 \leq 2$, on a $u_1 \geq u_0$ et on prouve par récurrence que $u_n \leq 2$ et $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2 : elle converge donc.

☞ Si $u_0 \geq 2$, on a $u_1 \leq u_0$ et on prouve par récurrence que $u_n \geq 2$ et $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 2 : elle converge donc.

Comme f est continue, (u_n) converge nécessairement vers un point fixe de f . Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

b. Idem.

⇒ *Une figure*



On conjecture que la suite converge vers 0.

⇒ *Définition de la suite.*

Aucun problème car le sinus est défini sur $\mathbb{R}$.

⇒ *Monotonie de la suite.*

On a $u_1 = \sin(u_0) \in [-1, 1]$.

☞ Cas où $u_1 \in [0, 1]$. Puisque que $\forall x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \sin(x) \leq x \leq 1$$

l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction sinus. Ainsi, la suite est décroissante minorée par 0 donc convergente.

☞ Cas où $u_1 \in [-1, 0]$. Puisque que $\forall x \in [-1, 0]$,

$$0 \geq \sin(x) \geq x \geq -1$$

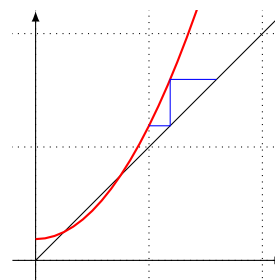
l'intervalle $[-1, 0]$ est stable par la fonction sinus. Ainsi, la suite est croissante majorée par 0 donc convergente.

⇒ *Convergence de la suite.*

L'unique point fixe du sinus sur $\mathbb{R}$ étant 0 (étudiez $x \mapsto \sin(x) - x$), la suite converge vers 0.

c. Ibidem.

⇒ *Une figure.*



On conjecture que la suite converge vers $1/4$ si $u_0 \in [0, 3/4[$, est constante égale à $3/4$ si $u_0 = 3/4$ et diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 3/4$.

⇒ *Définition de la suite.*

Aucun problème car la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

⇒ *Convergence de la suite.*

Notons f la fonction définissant la suite. Un calcul sans difficulté montre que f n'admet que deux points fixes, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Comme f est continue, si la suite converge, sa limite est un point fixe de f .

☞ Cas où $u_0 \in [0, 1/4]$. L'intervalle $[0, 1/4]$ étant stable par f , la suite est à valeurs dans $[0, 1/4]$. Sur cet intervalle, $f(x) \geq x$ donc la suite est croissante. Comme elle est majorée, elle converge; le seul point fixe de f sur cet intervalle étant $1/4$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/4$.

☞ Cas où $u_0 \in [1/4, 3/4[$. L'intervalle $[1/4, 3/4[$ étant stable par f , la suite est à valeurs dans $[1/4, 3/4[$. Sur cet intervalle, $f(x) \leq x$ donc la suite est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge vers une limite appartenant à $[1/4, u_0] \subset [1/4, 3/4[$; le seul point fixe de f sur $[1/4, 3/4[$ étant $1/4$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/4$.

☞ Cas où $u_0 = 3/4$. La suite est clairement constante.

☞ Cas où $u_0 > 3/4$. L'intervalle $]3/4, +\infty[$ étant stable par f , la suite est à valeurs dans $]3/4, +\infty[$. Sur cet intervalle, $f(x) \geq x$ donc la suite est croissante. Elle ne peut converger car $]u_0, +\infty[$ ne contient aucun point fixe de f . Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2.11.

- a. Étudions les variations de $P_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $P_n(x) = x^n - nx + 1$. La fonction polynôme P_n est continue sur $[0, 1]$ or $P_n(0) = 1$ et $P_n(1) = 2 - n \leq 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $P_n(c) = 0$. P_n est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1]$,

$$P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$$

La fonction polynôme P_n est donc strictement décroissante sur $[0, 1]$, il existe donc une unique racine u_n de P_n sur $[0, 1]$.

- b. Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u_n) &= P_{n+1}(u_n) - P_n(u_n) \\ &= -u_n - (1 - u_n)u_n^n < 0 \end{aligned}$$

et d'après les variations de P_{n+1} sur $[0, 1]$ étudiées à la question a), on a $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel positif ℓ . Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell > 0$. Comme $\forall n \geq 2$, $u_n^n = nu_n - 1$, on aurait $u_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui est absurde car $u_n^n \leq 1$ pour tout $n \geq 2$.

- c. Pour tout $n \geq 2$, $nu_n - 1 = u_n^n \leq 1$, d'où

$$0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$$

ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2.12.

Raisonnons par l'absurde : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$, alors

$$1 = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui est manifestement absurde.

2.13.

On a

$$\frac{\exp(\exp(n))}{n^n} = \exp(\exp(n) - n \ln(n))$$

Par croissances comparées, $n \ln n \ll e^n$, donc

$$\exp(n) - n \ln(n) = \exp(n) \left(1 - \frac{n \ln(n)}{e^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

ainsi

$$\frac{\exp(\exp(n))}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et donc $n^n \ll \exp(\exp(n))$.

2.14.

- a. Comme

$$2^n n^{666} e^{-n} = n^{666} e^{(\ln(2)-1)n}$$

et $\ln(2) - 1 < 0$, on déduit des croissances comparées que :

$$2^n n^{666} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- b. Comme

$$2^n n^{666} e^{-n/2} = n^{666} e^{(\ln(2)-1/2)n}$$

et $\ln(2) - 1/2 > 0$, on déduit des croissances comparées que :

$$2^n n^{666} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

- c. Comme

$$|2^n \sin^2(n) e^{-n}| \leq e^{(\ln(2)-1)n}$$

et $\ln(2) - 1 < 0$, on déduit des croissances comparées et du théorème des gendarmes que :

$$2^n \sin^2(n) e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- d. Comme

$$n(\ln(n))^{-\ln(n)} = e^{\ln(n) - \ln(n) \ln(\ln(n))}$$

on déduit des croissances comparées que :

$$n(\ln(n))^{-\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2.15.

On a $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $e^{u_n - v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,
ce qui équivaut à $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$ par
continuité du logarithme en 1.

2.16.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$u_n = -n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ainsi

$$u_n \sim -n^2 \frac{1}{n} \frac{1}{n} = -1$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.