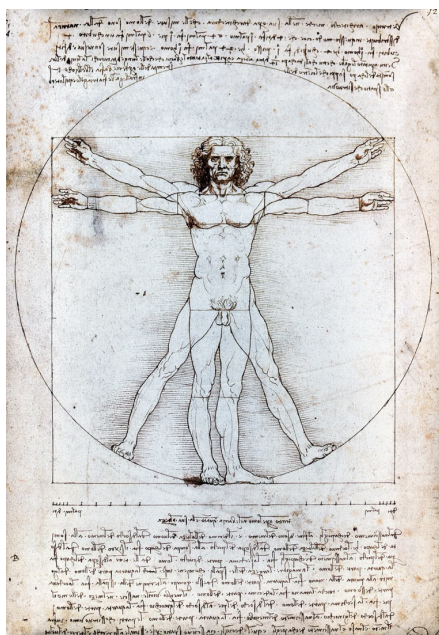




L'objectif de ce chapitre est de retrouver, à partir d'une axiomatique de $\mathbb{R}$, les principales propriétés de cet ensemble. Nous nous attarderons en particulier sur la manipulation des développements décimaux, même si ces derniers ne seront fondés que plus tardivement dans le cours d'analyse.



L'homme de Vitruve, Léonard de Vinci

1	Nombres réels	1
1	L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels	2
1.1	Règles de calcul sur les inégalités	3
1.2	Valeur absolue et distance entre deux nombres réels	5
2	Introduction aux suites de nombres réels	7
2.1	Notations usuelles et représentations géométriques d'une suite	7
2.2	Convergence	7
3	Bornes supérieures ou inférieures	8
4	Convexité et intervalles	10
5	La partie entière	11
6	Application aux équations algébriques	12
6.1	Racine n -ème d'un nombre réel positif	12
6.2	Équations du second degré	13
7	Approximations décimales d'un nombre réel	14
7.1	Introduction au développement décimal d'un nombre réel	15
7.2	Développement décimal d'un nombre rationnel	15
7.3	Développement décimal d'un nombre irrationnel	16
8	Tests	19
9	Solutions des tests	20

DURANT de nombreux siècles, les Mathématiciens ont considéré les nombres complexes comme donnés *a priori* à l'instar des points et des droites en Géométrie classique. Ils se représentaient l'ensemble des nombres réels comme le continuum d'une droite graduée.



Dedekind

C'est la crise provoquée par les débuts de la théorie des ensembles au milieu du XIX^e siècle qui mena progressivement les savants à proposer des constructions de l'ensemble des nombres réels.

De toutes les constructions des ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, celle de la droite réelle est de loin la plus technique et abstraite.

Il est profitable d'attendre un cours de L3 afin de l'aborder avec un peu plus d'expérience.

La première construction date de 1869 et on la doit à **Méray** via des suites de Cauchy, puis **Heine** exposa en 1872 les travaux de **Cantor** sur ce sujet et enfin **Dedekind** proposa sa célèbre construction par les coupures la même année.

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

À défaut d'une construction de l'ensemble des nombres réels, nous donnerons comme point de départ une définition axiomatique de $\mathbb{R}$. Tous ensembles vérifiant les conditions exposées ci-dessous sont isomorphes au sens défini dans le chapitre ALG 2.

Proposition 1.0. (Axiomatique de $\mathbb{R}$).

Il existe un ensemble $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{R}$ contient tous les nombres rationnels.
2. $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ vérifiant les propriétés suivantes :
 - a. Elles coïncident avec les opérations usuelles sur les rationnels.
 - b. Associativité de $+$ et $\times$: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ et $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
 - c. Commutativité de $+$ et $\times$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = y + x$ et $x \times y = y \times x$.
 - d. Les réels 0 et 1 sont neutres pour $+$ et $\times$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$ et $x \times 1 = x$.
 - e. Tout réel x admet un opposé, i.e. un élément x' tel que $x + x' = 0$ (on le note $-x$).
 - f. Tout réel x non nul admet un inverse, i.e. $\exists x''$ tel que $xx'' = 1$ (on le note x^{-1} ou encore $\frac{1}{x}$).
 - g. Distributivité de la multiplication sur l'addition : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$.
3. L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ totale prolongeant celle de $\mathbb{Q}$ et vérifiant :
 - a. L'addition est compatible avec la relation d'ordre : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \implies x + z \leq y + z$.
 - b. La multiplication est positivement compatible avec la relation d'ordre :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } z \geq 0) \implies x \times z \leq y \times z$$
 - c. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Pour deux réels x et y , on dit que x est strictement inférieur à y (notation $x < y$) si $x \leq y$ et $x \neq y$. On définit classiquement $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ et $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$, de même pour les variantes $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ épointées de 0.

La relation $\leq$ étant totale, deux réels quelconques x et y sont toujours comparables, i.e. vérifient $x \leq y$ ou $y \leq x$. Cette propriété permet de définir par récurrence le maximum de n nombres réels.

Notation 1.1. Maximum et minimum d'un nombre fini de réels

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ respectivement le plus grand et le plus petit des deux nombres x et y . On généralise (récurrence) à un nombre fini de réels :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \max(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max(\max(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$$

On en déduit facilement que toute partie finie de $\mathbb{R}$ (i.e. ayant un nombre fini d'éléments) admet un maximum. On adapte cette définition et cette dernière propriété au cas d'un minimum.

Les axiomes opératoires (cf. le 2. ci-dessus) sont bien connus des lecteurs, nous ne reviendrons pas sur eux. Le lecteur est renvoyé au cours ALG 2 pour les règles d'exponentiation, que nous avons énoncé directement dans C. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons principalement mettre l'accent sur les conséquences des axiomes 3., consacrés à la relation d'ordre.

1.1. Règles de calcul sur les inégalités

On déduit de cette axiomatique de nombreuses propriétés usuelles de $\mathbb{R}$. Par exemple, pour tout réel x , $x \leq 0$ équivaut à $-x \geq 0$. En effet, pour un réel x positif, on a par compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition :

$$0 + (-x) \leq x + (-x)$$

Ainsi $-x \leq 0$. La réciproque en découle en appliquant le résultat à $-x$ au lieu de x .

Les règles de calcul usuelles ont été regroupées dans l'encadré de la page suivante.

Démontrons par exemple les résultats de superposition pour les sommes. Considérons quatre nombres réels a, a', b et b' tels que $a \leq b$ et $a' \leq b'$. On déduit de l'axiome 3.a. que $a + a' \leq b + a'$ et $a' + b \leq b' + b$. Ainsi par transitivité de la relation $\leq$, on en déduit que $a + a' \leq b + b'$. Par récurrence sur le nombre de termes, on en déduit la propriété générale de superposition :

$$(\forall i \in [1, n], a_i \leq b_i) \implies \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$$

La propriété est vraie aux rangs 1 et 2 (par ce qui précède). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1}$ vérifiant $a_i \leq b_i$ pour tous les indices i de 1 à $n+1$. On déduit de l'hypothèse au rang n que $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$. On déduit alors de ce qui précède que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1} \leq \sum_{i=1}^n b_i + b_{n+1}$$

d'où le résultat au rang $n+1$. Passons au cas d'une superposition d'inégalité dont l'une au moins est stricte. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels tels que $a_i \leq b_i$ pour tout indice i entre 1 et n et tel qu'il existe un indice i_0 entre 1 et n vérifiant $a_{i_0} < b_{i_0}$. On alors

$$\sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = b_{i_0} - a_{i_0} + \sum_{i \in [1, n] \setminus \{i_0\}} (b_i - a_i)$$

Posons $x := b_{i_0} - a_{i_0}$ et $y := \sum_{i \in [1, n] \setminus \{i_0\}} (b_i - a_i)$. On sait par le point précédent que $y \geq 0$. On sait également que $x > 0$. Il reste à justifier que $x + y > 0$. On sait déjà que $x + y \geq 0$. Raisonnons par

l'absurde en supposant que $x + y = 0$. On aurait alors $x = -y \leq 0$ (cf. le préambule de ce paragraphe) ce qui est absurde. Les autres propriétés se démontrent avec des arguments analogues (une récurrence pour le produit).

Opérations et inégalités

- ⇒ **Opposés** : pour tous réels a, b et c , on a $a \leq b \leq c$ si et seulement si $-c \leq -b \leq -a$.
- ⇒ **Multiplication** : pour tous réels a, b, λ et μ avec $\lambda > 0$ et $\mu < 0$,
$$\begin{cases} a \leq b \iff \lambda a \leq \lambda b \\ a \leq b \iff \mu b \leq \mu a \end{cases}$$
- ⇒ **Superposition par somme** : pour tous réels a, b, a' et b' ,
$$\begin{cases} a \leq b \\ a' \leq b' \end{cases} \implies a + a' \leq b + b'.$$
- ⇒ On généralise par récurrence à n couples : $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i \leq b_i) \implies \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i.$
- ⇒ $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i \leq b_i)$ et $(\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_j < b_j) \implies \sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i.$
- ⇒ **Superposition par produit** : pour tous réels a, b, a' et b' ,
$$\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq a' \leq b' \end{cases} \implies aa' \leq bb'.$$
- ⇒ On généralise par récurrence à n couples : $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq a_i \leq b_i) \implies \prod_{i=1}^n a_i \leq \prod_{i=1}^n b_i.$
- ⇒ **Recentrer des inégalités** : $\forall (a, x, u, b) \in \mathbb{R}^4, x - a \leq u \leq x - b \iff u + b \leq x \leq u + a.$
- ⇒ **Inverses** : deux nombres de même signe sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.
- ⇒ Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous ces réels sont nuls.
- ⇒ Si x et y sont positifs, $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \leq y \iff x^n \leq y^n.$

Attention, on peut additionner membre à membre des inégalités mais pas les soustraire ! Par exemple, on a $1 < 3$ et $4 < 7$ mais l'inégalité $1 - 4 < 3 - 7$ est fausse.

Comment encadrer une différence ?

$$\begin{cases} m' \leq a' \leq M' \\ m \leq a \leq M \end{cases} \implies m' - M \leq a' - a \leq M' - m; \text{ pour majorer } a' - a, \text{ il suffit de } \begin{cases} \text{majorer } a' \\ \text{minorer } a \end{cases}.$$

De même, on ne peut diviser membre à membre deux inégalités entre des nombres strictement positifs. Par exemple, on a $1 < 2$ et $4 < 10$ mais l'inégalité $\frac{1}{4} < \frac{2}{10}$ est fausse.

Comment encadrer un quotient ?

$$\begin{cases} 0 < m' \leq a' \leq M' \\ 0 < m \leq a \leq M \end{cases} \implies \frac{m'}{M} \leq \frac{a'}{a} \leq \frac{M'}{m}; \text{ pour majorer } \frac{a'}{a}, \text{ il suffit de } \begin{cases} \text{majorer } a' \\ \text{minorer } a \end{cases}.$$

On retiendra aussi que la comparaison de deux fractions peut se faire via les produits en croix :

$$\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4, \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc$$

1.2. Valeur absolue et distance entre deux nombres réels

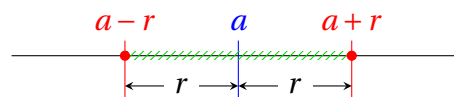
La valeur absolue est l'outil au fondement des notions de convergence et de limite.

Définition 1.2. La valeur absolue

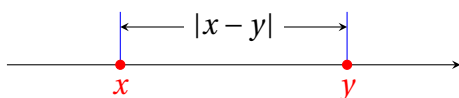
Pour tout réel x , on note $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

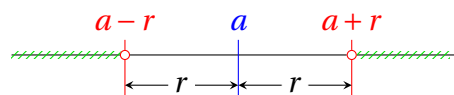
$\Rightarrow$ Réels x vérifiant $|x - a| \leq r$:



La valeur absolue permet de définir la distance $|x - y|$ entre deux nombres réels x et y .



$\Rightarrow$ Réels x vérifiant $|x - a| > r$:



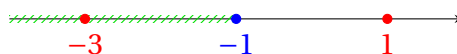
On reconnaît respectivement $[a - r, a + r]$ et $] -\infty, a - r[\cup] a + r, +\infty[$.

Il faut constamment avoir à l'esprit cette interprétation géométrique lorsque l'on manipule la valeur absolue.

Proposition 1.3. (Propriétés de la valeur absolue).

- Pour tout $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$, $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r$.
- Pour tout $(x, a) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$, $|x - a| > r \iff x < a - r$ ou $x > a + r$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \times |y|$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $|x + y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0$.
- Inégalité triangulaire généralisée : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \dots, x_n$, $\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$.
Il y a égalité si et seulement si les x_k sont tous de même signe.

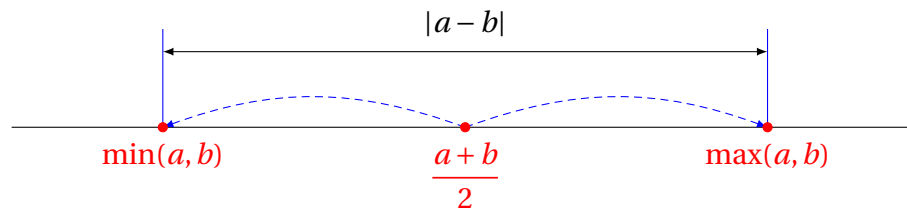
✕ Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité $|x + 3| \leq |x - 1|$ signifie que x est plus proche de -3 que 1, ie x appartient à la demi-droite issue du milieu -1 de $[-3, 1]$ et qui contient -3 :



On peut aussi le retrouver par le calcul, en remarquant que

$$\begin{aligned} |x + 3| \leq |x - 1| &\iff |x + 3|^2 \leq |x - 1|^2 \\ &\iff (x + 3)^2 \leq (x - 1)^2 \\ &\iff x^2 + 6x + 9 \leq x^2 - 2x + 1 \\ &\iff 8x \leq -8 \\ &\iff x \leq -1 \end{aligned}$$

✗ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La relation $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ est évidente si on la « voit » sur l'axe réel :



On obtient de même $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

✗ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-3 < a \leq 4$ et $-3 < b < 2$. Encadrons les nombres $a+b$, $a-b$ et ab

- ✓ Encadrer $a+b$ est immédiat par superposition directe des inégalités, on obtient $-6 < a+b < 6$.
- ✓ Le cas de $a-b$ nécessite d'encadrer au préalable $-b$. On a $-2 < -b < 3$ puis on peut superposer les inégalité. On trouve $-5 < a-b < 7$.

- ✓ Le cas de ab est plus délicat. On peut donner un premier encadrement en utilisant la valeur absolue. Comme $|a| \leq 4$ et $|b| < 3$, on a $|ab| = |a| \times |b| < 12$ et donc $-12 < ab < 12$. On voit facilement que cet encadrement peut-être affiné. Il y a deux façons d'obtenir de « grandes » valeurs de ab : choisir a et b proches de 2 et 4 ou proches de -3 et -3 . On comprend ainsi que le produit ab ne peut excéder 9. On peut obtenir un meilleur encadrement du produit ab en effectuant une disjonction de cas sur les signes de a et b .

✦ Cas 1 : $0 \leq a \leq 4$ et $0 \leq b < 2$. On a par superposition $0 \leq ab < 8$.

✦ Cas 2 : $0 \leq a \leq 4$ et $-3 < b < 0$.

On a $0 < |b| < 3$ et $0 \leq |a| \leq 4$ d'où $0 \leq |ab| < 12$ et puisque $ab < 0$, on a $-12 < ab < 0$.

✦ Cas 3 : $-3 < a < 0$ et $0 \leq b < 3$.

On a $0 < |a| < 3$ et $0 \leq |b| < 3$ d'où $0 \leq |ab| < 9$ et puisque $ab < 0$, on a $-9 < ab < 0$.

✦ Cas 4 : $-3 < a < 0$ et $-3 < b < 0$.

On a $0 < |a| < 3$ et $0 < |b| < 3$ d'où $0 < |ab| < 9$ et puisque $ab > 0$, on a $0 < ab < 9$.

On a donc $-12 < ab < 9$.

✗ Le résultat suivant est souvent utile en Analyse. Si un réel x vérifie $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$.

- ✓ On raisonne par contraposition. Supposons $x \neq 0$. Posons $\varepsilon_0 := \frac{|x|}{2}$.
- ✓ Comme $x \neq 0$, on a $\varepsilon_0 < |x|$. Ainsi $\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon$.

La valeur absolue permet de définir la notion de valeur approchée à la précision ε .

Définition 1.4. Valeur approchée à ε -près

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et x un nombre réel.

⇒ On dit qu'un réel $\hat{x}$ est une valeur approchée de x à ε -près si $|x - \hat{x}| \leq \varepsilon$.

⇒ On parle de valeur approchée par excès si $\hat{x} \geq x$, et par défaut si $x \leq \hat{x}$.

Le lecteur se souvient que $\sqrt{2}$ est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = 2$, nous y reviendront d'ailleurs d'ici quelques paragraphes. Le nombre 1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} -près par défaut car $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ (il suffit de remarquer que $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$).

2. Introduction aux suites de nombres réels

La notion de suite est centrale en Analyse et intimement liée à l'idée d'approximation.

Considérons par exemple, le nombre rationnel $\frac{1}{2}$. On peut l'appréhender au moyen de son développement décimal 0,5 qui ne contient qu'un nombre fini de chiffres significatifs. En revanche, le nombre irrationnel $\frac{1}{3}$ s'écrit sous forme décimale

$$\frac{1}{3} = 0,333333\ldots \quad \text{avec une infinité de « 3 » après la virgule}$$

Cette égalité est plus délicate à appréhender que $\frac{1}{2} = 0,5$ car derrière ces trois petits points, i.e. le nombre infini de « 3 », se cache l'idée de limite :

le nombre 0,3333...3 (avec n trois) se rapproche *indéfiniment* du rationnel $\frac{1}{3}$ quand n augmente

On voit apparaître ici les notions de suite et de limite, bien connues du lecteur.

2.1. Notations usuelles et représentations géométriques d'une suite

Définition 1.5. Suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

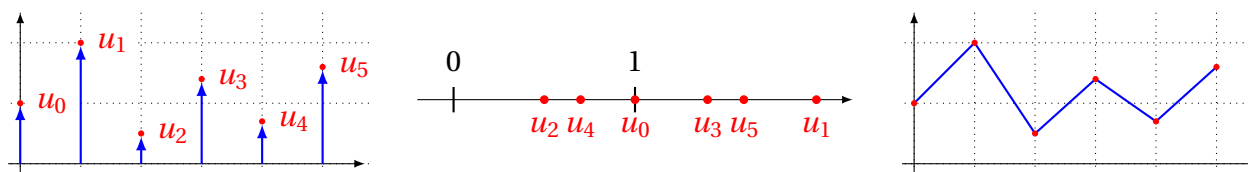
Le lecteur est renvoyé au chapitre ALG 2 pour la notion générale de suite.

⇒ On appelle suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

⇒ Notation séquentielle : pour une suite $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note f_n au lieu de $f(n)$; on note aussi $f = (f_n)_{n \geq 0}$ ou encore $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que f est la suite de terme général f_n .

⇒ L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il y a deux façons de se représenter une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: en dimension deux, au moyen des points (n, u_n) (en les joignant ou pas), ou en dimension un, en positionnant u_n sur un axe gradué.



2.2. Convergence

D'un point de vue intuitif, la convergence de suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers 0 signifie que $\frac{1}{n}$ peut être rendu « aussi petit » que l'on veut pourvu que n soit assez grand.

Afin d'éviter toute ambiguïté, voici une traduction formelle de cette propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Dans cette définition, l'indice n_0 dépend de ε . Par exemple, pour $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$ équivaut à $n \geq 10$, la valeur $n_0 := 10$ convient. En fait tout indice supérieur à celui-ci convient dans la définition. D'une façon plus générale, la convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers zéro sera définie par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon$$

La valeur absolue est indispensable dans le cas général où l'on ne sait rien du signe des termes u_n .
La convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un réel ℓ est naturellement définie par la propriété $u_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Définition 1.5. Convergence, limite d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ou encore qu'elle est convergente) s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

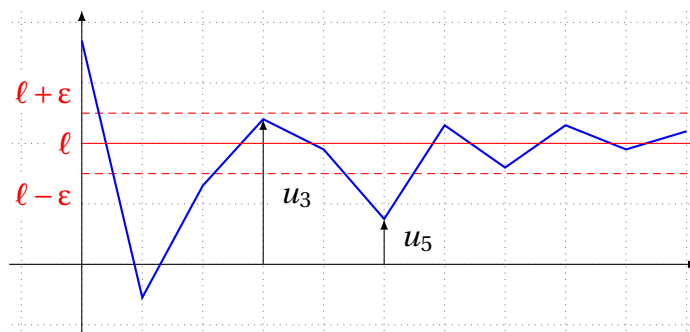
En cas d'existence, le nombre réel ℓ est unique et appelé limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On écrit $\ell = \lim u_n$ ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

On déduit de la définition que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ équivaut à $|u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

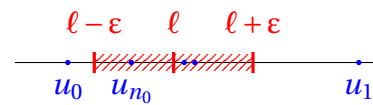
Les deux interprétations géométriques de la convergence

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel le graphe de $u = (u_n)$ est contenu dans la bande horizontale d'inéquations $\ell - \varepsilon \leq y \leq \ell + \varepsilon$.



On peut aussi donner une interprétation de la convergence en dimension un (sur la droite réelle).

Pour tout réel ε strictement positif, il existe un rang n_0 à partir duquel *tous* les termes de la suite appartiennent à $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.



3. Bornes supérieures ou inférieures

On rappelle quelques définitions données dans le chapitre ALG 2.

Notation 1.6. Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

⇒ On dit qu'un réel M est un majorant de A si $\forall a \in A, a \leq M$.

⇒ On dit qu'un réel m est un minorant de A si $\forall a \in A, m \leq a$.

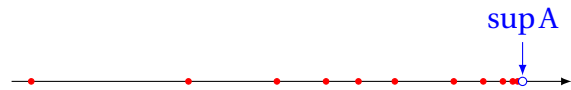
⇒ Sous réserve d'existence, on appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A .

⇒ Sous réserve d'existence, on appelle borne inférieure de A le plus grands des minorants de A .

On emploie les notations suivantes : $\sup_{a \in A} a$ ou plus simplement $\sup A$, de même $\inf_{a \in A} a$ ou $\inf A$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de maximum (synonyme de plus grand élément) : A admet un maximum s'il existe un élément de A plus grand (au sens large) que tous les autres, on le note alors $\max A$. On adapte cette définition au cas d'un minimum noté $\min A$ en cas d'existence.

D'un point de vue intuitif, la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ (supposée non vide et majoré) est un majorant M de A tel qu'il existe des éléments de A arbitrairement proches de M : on peut s'approcher aussi près que l'on veut de M en restant dans A .



Ainsi, un réel M est la borne supérieure de A *si et seulement si* M est un majorant de A et tout nombre M' tel que $M' < M$ n'est pas un majorant de A . Cette seconde propriété est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a$$

- ✗ La partie $A_1 := \mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure car n'est pas majorée.
- ✗ Le sous-ensemble $A_2 := \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ admet une borne supérieure qui vaut 1 puisque l'ensemble de ses majorants est $[1, +\infty[$ mais n'admet pas de maximum car $1 \notin A_2$. Ainsi, il peut exister une borne supérieure mais pas de maximum mais tout maximum est une borne supérieure.

La propriété 3.a. de la proposition 1 (cf. page 2) est fondamentale en analyse.

Théorème 1.7. (Propriété de la borne supérieure)

Toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

De façon duale, toute partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure. La propriété d'Archimède se démontre facilement en utilisant la propriété de la borne supérieure.

Lemme 1.8. (Propriété d'Archimède)

Soit a et x deux réels tels que $a > 0$. Il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $n_0 a > x$.

- ✗ On en déduit que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - ✓ Soit $\varepsilon > 0$. On déduit du lemme l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \varepsilon > 1$.
 - ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$. On a $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Ainsi $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- ✗ On voit facilement que la propriété d'Archimède est équivalente à $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: en admettant que cette suite converge vers 0, on peut démontrer le lemme.

Les bornes admettent une caractérisation séquentielle – ie au moyen des suites – beaucoup plus maniable que la définition.

Proposition 1.9. (Caractérisation séquentielle des bornes)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée. Un réel M est la borne supérieure de A si et seulement si :

1. M est un majorant de A ;
2. Il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$

On adapte bien-sûr cette proposition au cas d'une borne inférieure (❗ 1.1) Une suite convergeant vers $\sup A$ (resp. $\inf A$) est appelée *suite maximisante* de A (resp. *minimisante*).

✕ Considérons $A := \left\{ 2(-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Cette partie est non vide par définition.

✓ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a $2(-1)^n + \frac{1}{n} \leq 2 + 1$. Ainsi A est majorée donc admet une borne supérieure. On peut affiner cette majoration :

✦ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2(-1)^{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1} \leq 0$ et $2(-1)^{2n} + \frac{1}{2n} = 2 + \frac{1}{2n} \leq 2 + \frac{1}{2}$.

✦ Ainsi $\frac{5}{2}$ est un majorant de A et appartient à A (choisir $n = 1$). Ainsi $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$.

✓ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a $2(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -2$. Ainsi A est minorée donc admet une borne inférieure.

✦ On devine que -2 est la borne inférieure de A : en choisissant n impair grand, on peut trouver des éléments de A arbitrairement proches de -2 . Le critère séquentiel permet de formaliser cette intuition. Posons $a_n := -2 + \frac{1}{2n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. On a $\inf A = -2$ puisque :

$$-2 \text{ minore } A, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$$

✦ Puisque $-2 \notin A$, A n'admet pas de minimum.

✕ Pour A bornée et non vide, $\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup A - \inf A$.

✓ Pour $(x, y) \in A^2$, on a $\inf A \leq x \leq \sup A$ et $-\sup A \leq -y \leq \inf A$ donc

$$\inf A - \sup A \leq x - y \leq \sup A - \inf A$$

Ainsi $|x - y| \leq \sup A - \inf A$.

✓ Considérons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup A$ et $a'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf A$. Ainsi

$$|a_n - a'_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\sup A - \inf A| = \sup A - \inf A$$

d'où $\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup A - \inf A$ par la caractérisation séquentielle des bornes.

La droite numérique achevée est utile pour étendre certaines définition aux infinis. Avec la définition suivante, on pourra écrire que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide admet des bornes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.10. Droite numérique achevée

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dans le cas d'une partie A non vide de $\mathbb{R}$ non majorée (resp. non minorée), on posera $\sup A := +\infty$ (resp. $\inf A := -\infty$).

4. Convexité et intervalles

Commençons par un petit rappel sur la typologie des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.11. Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $[x, y] := \{t \in \mathbb{R}; x \leq t \leq y\}$, $[x, +\infty[:= \{t \in \mathbb{R}; x \leq t\}$, etc.

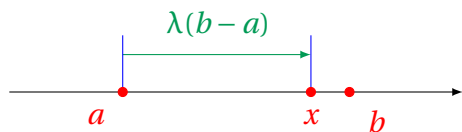
⇒ On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ d'un des types précédents.

⇒ On appelle vrai intervalle tout intervalle ayant une infinité d'éléments.

⇒ On appelle segment tout intervalle de la forme $[x, y]$ avec $x \leq y$.

⇒ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. On appelle longueur de intervalle $[x, y[$ (ou $]x, y]$, etc.) le réel $y - x$.

On peut facilement décrire certains de ces intervalles au moyen de la notion de combinaison linéaire convexe.



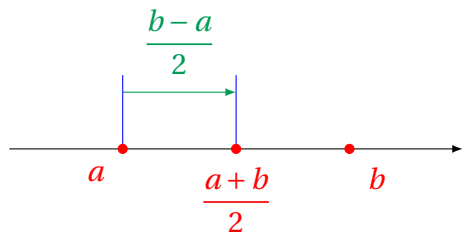
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On appelle combinaison linéaire convexe de a et b tout réel de la forme

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \text{ où } \lambda \in [0, 1]$$

On obtient donc le milieu pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

L'interprétation géométrique de $\lambda \in [0, 1]$ dans

$$x = (1 - \lambda)a + \lambda b = a + \lambda(b - a)$$



est claire : le réel λ est la fraction de la longueur totale $b - a$ à laquelle se trouve x par rapport à l'extrémité a . Il est intéressant de comprendre $(1 - \lambda)a + \lambda b$, pour $\lambda \in [0, 1]$, comme une moyenne pondérée des points a et b .

On obtient facilement (§ 1.2) :

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b; \lambda \in [0, 1]\},]a, b[= \{(1 - \lambda)a + \lambda b; \lambda \in]0, 1[\} \text{ et } [a, b[= \{(1 - \lambda)a + \lambda b; \lambda \in [0, 1[\}$$

Proposition 1.12. (Caractérisation des intervalles)

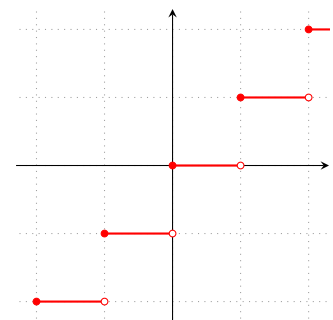
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe (i.e. $\forall (a, b) \in I^2, [a, b] \subset I$).

5. La partie entière**Définition 1.13. La partie entière**

Pour tout réel x , on appelle partie entière de x et on note $[x]$ l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k + 1$.

Par exemple, $[5, 78] = 5$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ est le plus grand des entiers relatifs inférieurs à x et, si x est positif, $x - [x]$ est la partie fractionnaire de x , par exemple $5,78 - [5,78] = 0,78$.

Le graphe de $x \mapsto [x]$ est représenté ci-contre, (§ 1.3.).



Proposition 1.14. (Propriétés de la partie entière).

$\forall x, x-1 < [x] \leq x$ et $[x] \leq x < [x] + 1$ et $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, [x+n] = [x] + n$.

- ✕ La partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Considérons deux réels x et y tels que $x \leq y$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell < k$ où $k := [x]$ et $\ell := [y]$. Comme $\ell < k$, on a $\ell + 1 \leq k$ d'où l'absurdité suivante :

$$\ell \leq y < \ell + 1 \leq k \leq x < k + 1$$

- ✕ La partie entière permet de décomposer un nombre réel de façon unique sous la forme

$$x = n + \theta \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 1[$$

L'entier n est la partie entière du nombre x et θ est appelé *partie fractionnaire* de x . Voici quelques illustrations de cette décomposition.

- ✓ Démontrons que, pour tout nombre réel x , $\left\lfloor \frac{[2x]}{2} \right\rfloor = [x]$.

✦ Soit x un réel et $(n, \theta) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[$ tel que $x = n + \theta$. On a $2x = 2n + 2\theta$.

✦ Cas 1 : $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$. On a $2\theta \in [0, 1[$ d'où $[2x] = 2n$ et $\frac{[2x]}{2} = n$ d'où $\left\lfloor \frac{[2x]}{2} \right\rfloor = n = [x]$.

✦ Cas 2 : $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$. On a $2\theta \in [1, 2[$ d'où $[2x] = 2n + 1$ et $\frac{[2x]}{2} = n + \frac{1}{2}$ d'où $\left\lfloor \frac{[2x]}{2} \right\rfloor = n = [x]$.

- ✓ Résolvons l'équation $[3x] = 2 + [x]$ d'inconnue réelle x .

✦ Soit x un réel et $(n, \theta) \in \mathbb{Z} \times [0, 1[$ tel que $x = n + \theta$. On a $3x = 3n + 3\theta$.

✦ Cas 1 : $0 \leq \theta < \frac{1}{3}$. L'équation équivaut à $3n = 2 + n$, ie $n = 1$.

✦ Cas 2 : $\frac{1}{3} \leq \theta < \frac{2}{3}$. L'équation équivaut à $3n + 1 = 2 + n$, ie $2n = 1$, qui n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$.

✦ Cas 3 : $\frac{2}{3} \leq \theta < 1$. L'équation équivaut à $3n + 2 = 2 + n$, ie $n = 0$.

On en déduit l'ensemble des solutions $\left[\frac{2}{3}, 1\right[\cup \left[1, \frac{4}{3}\right[$.

6. Application aux équations algébriques

Dans ce paragraphe, on montre comment retrouver la théorie des équations du second degré à coefficients réels à partir de l'axiomatique de $\mathbb{R}$ que nous avons développée.

6.1. Racine n -ème d'un nombre réel positif

Les équations du second degré reposent sur la notion de racine carrée. Nous évoquerons ici plus généralement le cas des racines n -èmes.

Définition 1.15. Racine n -ème d'un réel positif

Pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = \delta$; on le note $\sqrt[n]{\delta}$ (« racine n -ème de δ »). Pour $n = 2$, on note plus sobrement $\sqrt{\delta}$ la racine carrée d'un réel δ positif. En particulier, on retiendra que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2} = |x|$$

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+$. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - \delta = x - \sqrt{\delta} = (x - \sqrt{\delta})(x + \sqrt{\delta})$$

l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = \delta$ est $\{-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta}\}$.

Il faut connaître la technique de la quantité conjuguée qui est utile pour manipuler des différences de racines carrées.

Formule de la quantité conjuguée

Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est la quantité conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

✕ Cas de la suite de terme général $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. En remarquant que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

il apparaît clairement que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ décroît vers 0, ce qui n'était pas évident.

6.2. Équations du second degré

Toute équation du second degré se ramène à une équation de la forme $x^2 = \delta$ d'inconnue x . Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Pour tout nombre réel x ,

$$P(x) := ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

où $\Delta := b^2 - 4ac$. Cette transformation du trinôme $ax^2 + bx + c$ s'appelle *mise sous forme canonique*.

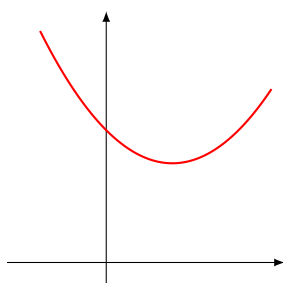
⇒ Cas où $\Delta < 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ est non nul et du signe de a car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

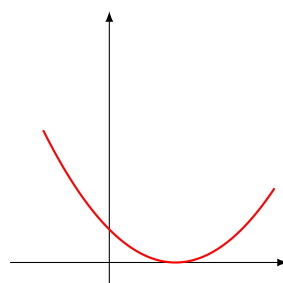
⇒ Cas où $\Delta \geq 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

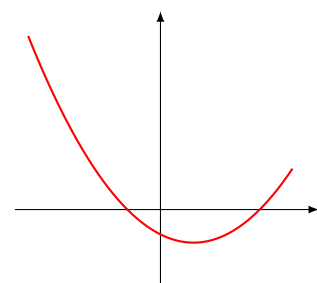
On retiendra l'allure du graphe de $x \mapsto P(x)$ (qui est une parabole) en fonction des signes de Δ et a :



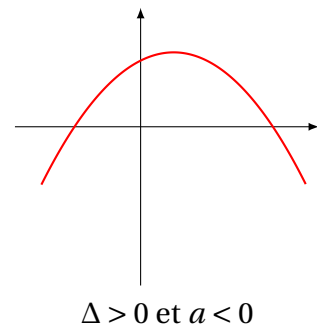
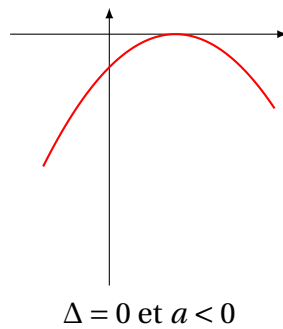
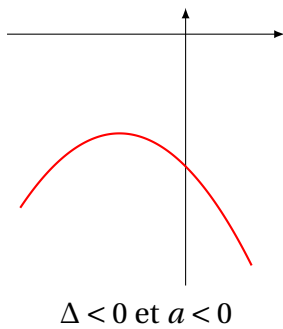
$\Delta < 0$ et $a > 0$



$\Delta = 0$ et $a > 0$



$\Delta > 0$ et $a > 0$



✕ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a > 0$ et, pour tout réel x , $P(x) := ax^2 + bx + c$.

Déterminons une CNS pour que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

✓ Notons $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant de P .

✓ Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Dans ce cas, P ne peut pas admettre deux racines réelles distinctes $x_1 < x_2$ car sinon, il prendrait des valeurs strictement négatives sur $]x_1, x_2[$. Ainsi $\Delta \leq 0$.

✓ Réciproquement, supposons $\Delta \leq 0$.

✦ Cas 1 $\Delta < 0$. On sait alors que P est du signe de a sur $\mathbb{R}$, ie $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

✦ Cas 2 : $\Delta = 0$. On sait alors que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - r)^2 \geq 0$ où $r := -\frac{b}{2}$.

Nous terminons cette section par une application classique des équations du second degré.

Proposition 1.16. (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.

7. Approximations décimales d'un nombre réel

En tant qu'utilisateur régulier d'une calculatrice depuis de nombreuses années, le lecteur a pris l'habitude de manipuler les nombres réels au travers d'approximations décimales. Par exemple, en demandant $\sqrt{2}$ à une machine quelconque, on obtient instantanément :

$$1,41421356237\dots$$

L'objectif de ce paragraphe est d'effectuer quelques rappels (voire plus) sur les développements décimaux et d'apporter un éclairage sur la façon de les obtenir. On peut bien entendu se limiter aux réels appartenant à $[0, 1[$ quitte à considérer $x - \lfloor x \rfloor$. Dans le cas d'un nombre réel positif x , la partie entière $\lfloor x \rfloor$ contribue aux chiffres à gauche de la virgule dans le développement décimal :

$$\sqrt{2} = 1,41421356237\dots = \underbrace{1}_{\text{partie entière}} + \underbrace{0,41421356237\dots}_{\text{partie fractionnaire}}$$

7.1. Introduction au développement décimal d'un nombre réel

La notion de développement décimal repose sur le théorème suivant : pour tout réel x dans $[0, 1[$, il existe une unique suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[0, 9]$ qui ne stationne¹ pas à 9 telle que

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdots$$

ce qui signifie

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n} \left(\text{cette somme infinie \acute{e}tant \`a comprendre comme } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{10^n} \right)$$

Le chiffre c_n est appelé n -ème décimale de x . Il nous faudra attendre le chapitre sur les séries numériques avant de justifier rigoureusement ce résultat. L'hypothèse de non stationnarité à 9, mentionnée ci-dessus, est essentielle comme l'illustre le contre-exemple suivant :

$$1 = 1,00000\dots = 0,99999\dots$$

En effet, par la formule des sommes géométriques,

$$\sum_{n=1}^N \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^N}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

Les nombres tels que $c_n = 0$ à partir d'un certain rang sont qualifiés de décimaux. Ce sont les nombres de la forme $\frac{k}{10^n}$ où $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Par exemple,

$$0,000561 = 561 \times 10^{-6} = \frac{561}{10^6}$$

7.2. Développement décimal d'un nombre rationnel

Plus généralement, le développement d'un rationnel positif $\frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ qui n'est pas décimal, peut être obtenu au moyen de l'algorithme usuel :

[illegible]

À partir du retour du chiffre 1, on retrouve la même séquence. Ainsi, $\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}$, la séquence sur-
lignée étant répétée à l'infini. Plus généralement, comme les restes possibles dans la division par q
sont en nombre fini (il n'y a que $0, \dots, q - 1$), la suite des décimales d'un rationnel sera toujours pé-
riodique à partir d'un certain rang. La réciproque est vraie. Considérons par exemple $x := 0,11\overline{123}$.
Posons $y := 100x - 11 = 0, \overline{123}$. Ce nombre vérifie l'équation :

$$1000y - 123 = y$$

d'où $y = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$ puis $100x = 11 + \frac{41}{333} = \frac{3704}{333}$ puis $x = \frac{926}{8325}$.

Nous démontrerons le résultat suivant un peu plus tard dans le cours d'analyse.

1. C'est-à-dire qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.

Proposition 1.17. (Caractérisation des décimaux par leur développement décimal).

Un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique APCR.

7.3. Développement décimal d'un nombre irrationnel

Dans le cas d'un nombre irrationnel x , l'idée est de chercher des approximations rationnelles explicites de ce réel afin de déduire de leurs décimales celles de x .

✕ Commençons par quelques exemples élémentaires qui vont nous permettre de mieux appréhender le cas général.

✓ Un nombre x a pour premières décimales 0,98 *si et seulement si* il vérifie $0,98 \leq x < 0,99$.

✓ Supposons que $0,98X45\cdots < x < 0,98X45\cdots + 0,001$ où $X \in \llbracket 0,9 \rrbracket$.

✦ Cas 1 : $X \in \llbracket 0,8 \rrbracket$. On a alors $0,98 < x < 0,98(X+1) < 0,99$. Les deux premières décimales de x sont bien 9 et 8.

✦ Cas 2 : $X = 9$. On a alors $0,98945\cdots < x < 0,99045\cdots$. Cet encadrement ne permet pas de déduire le chiffre des centièmes de x : par exemple 0,9895 et 0,99 vérifient cet encadrement.

✓ Supposons maintenant que $0,98X45\cdots - 0,001 < x < 0,98X45\cdots$ où $X \in \llbracket 0,9 \rrbracket$.

✦ Cas 1 : $X \in \llbracket 1,9 \rrbracket$. On a alors $0,98 < 0,98(X-1) < x < 0,98X45\cdots < 0,99$. Les deux premières décimales de x sont bien 9 et 8.

✦ Cas 2 : $X = 0$. On a alors $0,97945\cdots < x < 0,98045\cdots$. Cet encadrement ne permet pas de déduire le chiffre des centièmes de x : par exemple 0,9795 et 0,98 vérifient cet encadrement.

✕ Plus généralement, on retiendra que pour a positif :

$$\begin{cases} a < x < a + 10^{-n} \\ \text{la } n\text{-ème décimale de } a \text{ n'est pas 9} \end{cases} \implies \text{les } n-1 \text{ premières décimales de } x \text{ sont celles de } a$$

$$\begin{cases} a - 10^{-n} < x < a \\ \text{la } n\text{-ème décimale de } a \text{ n'est pas 0} \end{cases} \implies \text{les } n-1 \text{ premières décimales de } x \text{ sont celles de } a$$

✕ Illustrons cette méthode sur le nombre irrationnel $\sqrt{2}$.

✓ Pour tout entier naturel n , on démontre par récurrence l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$(\sqrt{2} + 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \text{et} \quad (\sqrt{2} - 1)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

Le couple $(a_0, b_0) := (1, 0)$ convient clairement au rang zéro. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant la relation ci-dessus. On a alors

$$(\sqrt{2} + 1)^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

Posons $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n + 2b_n, a_n + b_n)$. Comme a_n et b_n sont des entiers naturels, il en est de même de a_{n+1} et b_{n+1} . De plus,

$$(\sqrt{2} - 1)^{n+1} = (a_n - b_n\sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = a_n + 2b_n - (a_n + b_n)\sqrt{2} = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2}$$

d'où la propriété au rang $n+1$.

✓ On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n}{2} \geq \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{2} \geq \frac{2^n}{2} \text{ et } b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \geq a_{n-1} \geq 2^{n-2}$$

Fixons à présent n dans $\mathbb{N}^*$. Comme $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$, on en déduit que

$$1 = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2})$$

Ainsi $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{b_n(a_n + b_n\sqrt{2})}$ et donc

$$0 < \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{n-2}(\sqrt{2}2^{n-1} + 2^{n-2})} < \frac{1}{4^{n-2}(2\sqrt{2}+1)} < \frac{1}{3 \times 4^{n-2}}$$

✓ Si on veut obtenir les deux premières décimales de $\sqrt{2}$, on recherche la plus petite valeur entière de n telle que $\frac{1}{3 \times 4^{n-2}} \leq 10^{-3}$: il s'agit de $n = 7$. Après quelques itérations, on trouve

$$\frac{a_7}{b_7} = \frac{239}{169} \text{ et on trouve par l'algorithme rappelé ci-dessus que } \frac{239}{169} = 1,414\dots$$

Comme l'approximation est par excès et que la troisième décimale n'est pas nulle, on peut en déduire que les deux premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 4 et 1.

✓ Pour doubler le nombre de décimales et arriver à quatre, on passe à $n = 10$:

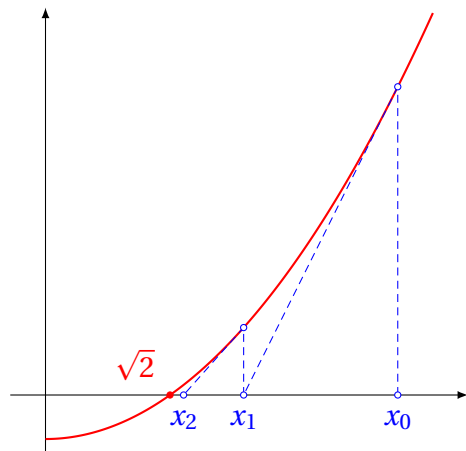
$$\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{3363}{2378} \text{ et on trouve par l'algorithme rappelé ci-dessus que } \frac{3363}{2378} = 1,41421\dots$$

Comme l'approximation est par excès et que la cinquième décimale n'est pas nulle, on peut en déduire que les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 4, 1, 4 et 2. Plus généralement :

Nombre de décimales souhaitées	2	4	6	8	10	20	30	40	50
Rang à atteindre	7	10	13	17	20	37	53	70	86

Sous réserve, à chaque fois, d'obtenir une $(n+1)$ -ème décimale non nulle.

✗ Dans ce contexte, on comprend qu'il est intéressant de trouver des approximations de très bonne qualité de $\sqrt{2}$, i.e. d'avoir à itérer le moins possible pour obtenir une précision raisonnable. Illustrons cela sur une autre façon d'obtenir des approximations de $\sqrt{2}$. L'idée vient d'Isaac Newton (la postérité a d'ailleurs donné son nom à la méthode).



✓ On cherche une approximation du zéro de $f : x \mapsto x^2 - 2$. Pour cela, on part de $x_0 := 2$ et on calcule l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. L'équation de cette tangente est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ d'où l'on tire l'abscisse x_1 du point d'intersection recherché :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On continue en recherchant l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au graphe de f au point $(x_1, f(x_1))$. En itérant le procédé, on obtient une suite récurrente :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

- ✓ On devine que le *profil convexe* de la courbe à droite de son intersection avec l'axe des abscisses, va assurer une convergence rapide de nos approximation vers $\sqrt{2}$. D'autre part, comme x_0 est rationnel que la relation de récurrence assure l'hérédité de la rationalité de x_n , on va bien obtenir des approximations rationnelles. Essayons d'estimer la précision de ces approximations. Posons $\delta_n := x_n - \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut facilement démontrer par récurrence que $\sqrt{2} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\delta_n}{2} - \frac{\delta_n}{\sqrt{2}x_n} = \frac{\delta_n^2}{2x_n}$$

Comme $x_n > \sqrt{2} > \frac{5}{4}$, on en déduit $0 \leq \delta_{n+1} \leq \frac{2\delta_n^2}{5}$ et on en déduit par une récurrence facile que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \delta_n \leq \frac{5}{2} \left(\frac{2\delta_1}{5} \right)^{2^{n-1}} < \frac{5}{2} \left(\frac{1}{25} \right)^{2^{n-1}}$$

Car $\delta_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{10}$.

- ✓ Si on veut obtenir les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$, on recherche la plus petite valeur entière de n telle que $\frac{5}{2} \left(\frac{1}{25} \right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-5}$: il s'agit de $n = 3$. Après quelques itérations, on trouve

$$x_3 = \frac{577}{408} \text{ et on trouve par l'algorithme rappelé ci-dessus que } \frac{577}{408} = 1,41421 \dots$$

- ✓ Comme l'approximation est par excès et que la cinquième décimale ne vaut pas zéro, on peut en déduire que les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 4, 1, 4 et 2. Plus généralement :

Nombre de décimales souhaitées	2	4	6	8	10	20	30	40	50
Rang à atteindre	3	3	4	4	5	5	6	6	7

On voit ici un réel gain de temps dans les calculs par rapport à la méthode précédente²!

On retiendra la moralité de ce paragraphe :

Contrôle d'une convergence – Vitesse de convergence

Comme nous l'exemple de $\sqrt{2}$ l'illustre, il est souvent intéressant de *quantifier* la convergence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers sa limite ℓ , i.e. de contrôler la distance de u_n à ℓ , c'est-à-dire connaître explicitement une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

C'est-ce-qu'on appelle « *contrôler* » la convergence. On obtient ainsi une estimation de la « *vitesse* » à laquelle la suite converge.

Le prochain chapitre est dédié à l'étude des suites de nombres réels. Nous y forgerons de nouveaux outils permettant d'assurer un tel contrôle.

2. Sous réserve, à chaque fois, d'obtenir une $(n+1)$ -ème décimale non nulle.

8. Tests

1.1.

Soit a et b deux réels strictement positifs, les parties suivantes sont-elles majorées, minorées. Si oui, quelles sont leurs bornes supérieures, inférieures ? Admettent-elles un plus grand élément, un plus petit élément ?

a. $\{a + bn; n \in \mathbb{N}\};$

b. $\{a + (-1)^n b; n \in \mathbb{N}\};$

c. $\left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}.$

1.2.

a. Répondre sans démonstration aux questions suivantes :

⇒ L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ?

⇒ La réunion de deux intervalles est-elle un intervalle ?

b. Donner sans justification une condition nécessaire ou suffisante pour que la réunion de deux intervalles fermés soit un intervalle.

1.3.

On définit la *partie fractionnaire* de $x \in \mathbb{R}$ par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

a. Calculer $\{54,465\}$ et $\{-36,456\}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.

c. Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \{x\}$ est périodique et tracer son graphe.

9. Solutions des tests

1.1.

Nous noterons A à chaque fois l'ensemble étudié.

- a. A minorée par $a \in A$ donc $\min(A) = \inf(A) = a$; A est clairement non majorée.
- b. C'est un gag car $A = \{a - b, a + b\}$: A est clairement bornée et $\inf(A) = \min(A) = a - b$ et $\max(A) = \sup(A) = a + b$;
- c. A est minorée par $-a$ et $\inf A = -a$ car

$$(-1)^{2n+1}a + \frac{b}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -a$$

Comme $-a \notin A$, A n'admet pas de plus petit élément; A majorée par $\max(-a + b, a + (b/2))$ (regarder séparément les n pairs et les n impairs) et

$$\sup A = \max A = \begin{cases} -a + b & \text{si } 4a < b \\ a + (b/2) & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2.

- a. $\Rightarrow$ L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.
 $\Rightarrow$ C'est faux pour la réunion.
- b. Pour deux intervalles fermés I et J , $I \cup J$ est un intervalle *si et seulement si* $I \cap J \neq \emptyset$.

1.3.

- a. $\{54, 465\} = 0, 465$ et $\{-36, 456\} = 0, 544$.
- b. Si $x \in \mathbb{Z}$, $\{ -x \} = 0 = \{ x \}$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc $\{ -x \} = 1 - \{ x \}$.
- c. on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\{x + 1\} = x + 1 - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \{x\}$$

D'où l'allure du graphe de la partie fractionnaire ...

