LOUIS-LE-GRAND **HX 6**

QUINZAINE N° 5

Lundi 15 décembre 2025 - Vendredi 9 janvier 2026

I. Questions de cours

1. Énoncé et démonstration de la formule de Leibniz : pour $u, v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, uv est de classe $\mathscr{C}^n$ et

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

2. Énoncé et démonstration de l'inégalité de Jensen.

3. Deux démonstrations de la relation

$$\forall x \in [-1,1] \quad , \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

II. Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants

2.1. Fonctions dérivables

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Interprétation géométrique. Tangente au graphe de f au point d'abscisse a.
La dérivabilité entraîne la continuité.	
Dérivabilité à gauche, à droite.	
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
Dérivabilité à droite, à gauche.	
Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables en un point, dérivables sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.	
b) Propriétés des fonctions dérivables	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.	
Théorème de Rolle.	

CONTENUS	COMMENTAIRES
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur I et si $\lvert f' \rvert$ est bornée par M sur I, alors f est M-lipschitzienne sur I.	Application à l'étude des suites récurrentes.
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers ℓ (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a.	Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

c) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Pour k dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	

2.2. Fonctions convexes

CONTENUS	COMMENTAIRES

a) Définition et caractérisation

Définition analytique.	Interprétation en termes de cordes.
Lemme des trois pentes.	Position du graphe par rapport à une sécante.
Caractérisation de la convexité par la croissance des taux d'accroissements.	
Inégalité de Jensen.	

b) Cas des fonctions dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position par rapport aux tangentes en cas de dérivabilité.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	